

Theoretische Informatik II - Übung 2

Sommersemester 2024

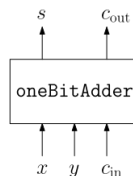
Hinweis: Abgaben bezüglich einer Prüfungsvorleistung sind im Modul Theoretische Informatik II nicht notwendig. Bei Fragen wenden Sie sich bitte per Mail an *simon.schulze@s2021.tu-chemnitz.de*.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass jede DNF-Formel für die boolesche Funktion $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ genau 2^{n-1} Terme besitzen muss.

Aufgabe 2

Entwerfen Sie einen Schaltkreis *oneBitAdder* : $\{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}^2$ für folgende Funktionalität:



Versuchen Sie, so wenig Gates wie möglich zu verwenden. Entscheiden Sie sich im Voraus, ob Sie beliebigen Fan-in erlauben wollen oder auf Fan-in 2 bestehen.

Aufgabe 3

Sei $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass *Maj_n* für genau die Hälfte der 2^n Eingaben eine 1 und für die andere Hälfte eine 0 ausgibt.

Aufgabe 4

Welche der booleschen Funktionen $\vee, \wedge, \neg, \oplus, Maj$ sind monoton? Zeichnen Sie die dazugehörigen Hasse-Diagramme. Schreiben Sie zusätzlich alle anderen booleschen Funktionen auf zwei Variablen auf. Geben Sie deren Namen an und bestimmen Sie, welche davon monoton sind und welche nicht.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Intervalle sind Binärintervalle? Geben Sie zusätzlich die Sternchennotation an, falls es sich um ein Binärintervall handelt.

- a) $[2, 5]$,
- b) $[3, 7]$,
- c) $[8, 11]$,
- d) $[0, 7]$,
- e) $[0, 15]$.

Aufgabe 6

Sei $n = 2^d$. Wie viele Binärintervalle gibt es in $\{0, \dots, n - 1\}$?

Aufgabe 7

a) Bauen Sie einen Schaltkreis für die boolesche Funktion „less than“:

$$LT : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$
$$LT(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (\mathbf{x})_2 < (\mathbf{y})_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

der \mathbf{x} und \mathbf{y} als n -stellige Binärzahlen auffasst und ausgibt, ob die Erste kleiner als die Zweite ist.

b) Bauen Sie Ihren Schaltkreis so um, dass dieser Größe $O(n)$, Tiefe $O(\log_2 n)$ und Fan-in 2 hat.