Technische Universität Chemnitz **Prof. Dr. Dominik Scheder**
Fakultät für Informatik **Simon Schulze**

Theoretische Informatik II - Übung 4

Sommersemester 2024

Hinweis: Abgaben bezüglich einer Prüfungsvorleistung sind im Modul Theoretische Informatik II nicht notwendig. Bei Fragen wenden Sie sich bitte per Mail an *simon.schulze@s2021.tu-chemnitz.de*.

Aufgabe 1

Sind folgende Abbildungen injektiv/surjektiv/bijektiv?

a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n^2$
b) $f_2 : \mathbb{N} \to \{0, 1, 4, 9, ...\}, \quad n \mapsto n^2$
c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$
d) $f_4 : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad x \mapsto x^2$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ und allgemein $\mathbb{N}^k \approx \mathbb{N}$ gelten.

Aufgabe 3

Finden Sie eine Bijektion $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ und zeigen Sie somit, dass $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4

Hilberts Hotel ist ein vom Mathematiker David Hilbert erdachtes Paradoxon. Es dient zur Veranschaulichung des Begriffes der Unendlichkeit in der Mathematik.
Dieses spezielle Hotel ähnelt einem Hotel aus der Realität - bis auf die Tatsache, dass es *unendlich* viele Zimmer besitzt. Das Hotel ist zum aktuellen Zeitpunkt *vollständig* ausgebucht.

Im folgenden sind drei Probleme gestellt. Versuchen Sie, diese zu lösen.

a) Stellen Sie sich vor, Sie arbeiten an der Rezeption des Hotels. Nun kommt *ein* Gast und fragt, ob noch ein Zimmer frei ist. Können Sie ein Zimmer anbieten?

b) Nach einiger Zeit ist das Hotel sehr beliebt geworden, sodass nun *unendlich viele* Gäste ein Zimmer wünschen. Was machen Sie jetzt?

c) In der Hochsaison kommt es vor, dass *unendlich viele Busse* mit jeweils *unendlich vielen Gästen* ankommen. Ist es immer noch möglich, alle unterzubringen? **Hinweis**: Nutzen Sie Cantors erstes Diagonalargument.

Abbildung 1: Hilberts Hotel. Abbildung entommen aus `https://www.ias.edu/ideas/2016/pires-hilbert-hotel`.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$ gilt. Nutzen Sie dazu die Methode der Cantor'schen Diagonalisation.

Aufgabe 6

Haben Sie schon einmal was vom unendlichen Geschenk gehört? Das unendliche Geschenk ist ein mathematischer Körper, der sozusagen aus unendlich vielen aufeinandergestapelten Geschenkboxen (Würfeln) besteht. Die n-te Box besitzt dabei eine Seitenlänge von $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Zudem sind die Boxen nicht miteinander verschmolzen, sondern unabhängig voneinander. Zeigen Sie, ...

a) dass dieser Körper eine *unendliche* Oberfläche besitzt.
b) dass dieser Körper ein *endliches* Volumen besitzt.

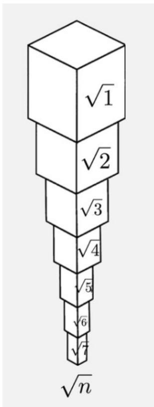

Abbildung 2: Das unendliche Geschenk. Abbildung entnommen aus `https://twitter.com/fermatslibrary/status/1166324490760065024`.