Technische Universität Chemnitz **Prof. Dr. Dominik Scheder**
Fakultät für Informatik **Simon Schulze**

Theoretische Informatik II - Übung 6

Sommersemester 2024

Hinweis: Abgaben bezüglich einer Prüfungsvorleistung sind im Modul Theoretische Informatik II nicht notwendig. Bei Fragen wenden Sie sich bitte per Mail an *simon.schulze@s2021.tu-chemnitz.de*.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Péter-Ackermann-Funktion a, die Sie bereits aus der Vorlesung kennen.
a ist definiert als:

$$a : \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}$$
$$a(x,y) := \begin{cases} y+1, & x = 0 \\ a(x-1,1), & y = 0 \\ a(x-1, a(x,y-1)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie wissen bereits, dass diese Funktion *nicht* primitiv-rekursiv ist. Zeigen Sie nun die folgenden Eigenschaften:

a) $y < a(x,y)$.
b) $a(x,y) < a(x,y+1)$.
c) $a(x,y+1) \leq a(x+1,y)$.
d) $a(x,y) < a(x+1,y)$.

Wenn $x \leq x'$ und $y \leq y'$ gilt, was können Sie über $a(x,y)$ und $a(x',y')$ aussagen?

Zusatz: Zeigen Sie, dass a *nicht* primitiv-rekursiv ist. Nehmen Sie dazu Folgendes als gegeben an:

- Für jedes primitiv-rekursive g existiert ein $f_g(n) := \max \left\{ g(x_1, ..., x_n) : \sum_{i=1}^{k} x_i \leq n \right\}$.
- Für jedes primitiv-rekursive g existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq k$ gilt: $f_g(n) < a(k,n)$.

Aufgabe 2

Implementieren Sie a in einer Programmiersprache Ihrer Wahl. Verwenden Sie dazu einmal die rekursive Definition von oben und einmal while-Schleifen.

Aufgabe 3

Implementieren Sie die Collatz-Folge in einer Programmiersprache Ihrer Wahl und testen Sie verschiedene Startwerte. Was fällt Ihnen auf? Die Collatz-Folge ist definiert als:

$$
\begin{aligned}
&f_C : \mathbb{N}_+ \mapsto \mathbb{N}_+ \\
&f_C(n) := \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ 3n+1, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$