Technische Universität Chemnitz
Dr. F. Göring

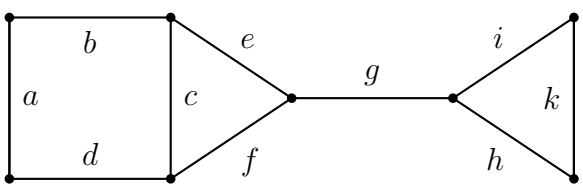
Chemnitz, 8. Dezember 2004
fällig: 17. Dezember 2004

Einführung in die Diskrete Mathematik
Übung 9

1. **(3 Punkte)** Zeige: Sei E eine endliche Menge, und $E_1, \ldots, E_k$ seien nichtleere Teilmengen von E mit $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = E$. Seien $b_1, \ldots, b_k$ nicht-negative ganze Zahlen, dann ist $(E, \mathcal{F} = \{F \subseteq E : |F \cap E_i| \leq b_i, i = 1, \ldots, k\})$ ein Matroid (genannt *Partitionsmatroid*). Insbesondere sind beide Matroide aus Übung 8.4 Partitionsmatroide.

2. **(5 Punkte)** Ein (gerichteter) Weg in einem Digraphen $D = (V, A)$ heißt hamiltonscher Weg, wenn er alle Knoten aus V besucht. Formuliere das Problem, in einem Digraphen $D = (V, A)$ einen hamiltonschen Weg zu finden, als die Suche nach einer unabhängigen Menge maximaler Kardinalität im Schnitt dreier Matroide.

3. **(5 Punkte)** Sei $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ eine Grundmenge und $A_i \in 2^T$, $i = 1, \ldots, m$ (nicht notwendigerweise $A_i \neq A_j$). Falls für eine Unterfamilie $\mathcal{A}_I = \{A_i : i \in I\}$ mit $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ eine injektive Abbildung (Auswahlfunktion) $\varphi : I \to \{1, \ldots, n\}$ mit $t_{\varphi(i)} \in A_i$ existiert, heißt $T_I = \{t_{\varphi(i)} : i \in I\}$ *Transversale* oder *System von verschiedenen Repräsentanten* der Unterfamilie $\mathcal{A}_I$. Zeige: $(T, \mathcal{F} = \{T_I : \exists I \subseteq \{1, \ldots, m\} : T_I$ ist Transversale von $\mathcal{A}_I\})$ ist ein Matroid (das *Transversalmatroid*). Hinweis: Konstruiere einen bipartiten Graphen $(V = \mathcal{A}_{\{1,\ldots,m\}} \cup T, E = \{\{A_i, t_j\} : t_j \in A_i\})$; Transversalen entsprechen Matchings; falls $X, Y \in \mathcal{F}$ mit $|X| < |Y|$, dann enthält die Vereinigung der entsprechenden Matchings einen alternierenden Weg, mit dem X vergrößert werden kann.

4. **(3 Punkte)** Auf m freie Stellen bewerben sich n Personen. Jede Person ist nur für eine Teilmenge der Stellen geeignet, hat aber einen stellenunabhängigen Wert für den Betrieb. Entwerfe einen Greedy-Algorithmus über einem Unabhängigkeitssystem für das Problem, eine Besetzung mit maximalem Wert zu finden. Welche Gütegarantie kann man erzielen?

5. **(4 Punkte)** Gib das System der Kreise und das System der Cokreise des folgenden Graphen an: