



Optimal mollifiers for spherical deconvolution

Ralf Hielscher und Michael Quellmalz

TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik

25. Rhein-Ruhr-Workshop

31. Januar 2015

Inhalt

1. Einleitung

2. Sphärische Faltungsoperatoren

Definition

Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen von Faltungsoperatoren

Klassifizierung durch Sobolevräume

Beispiele

3. Inversion sphärischer Faltungsoperatoren

Verrauschte Daten

Diskrete Daten

Asymptotisch optimale Mollifier

Beweisidee

4. Anwendung

Numerische Resultate für Funk–Radon–Transformation

Verallgemeinerung: Kreismittelwert–Transformation

Inhalt

1. Einleitung

2. Sphärische Faltungsoperatoren

Definition

Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen von Faltungsoperatoren

Klassifizierung durch Sobolevräume

Beispiele

3. Inversion sphärischer Faltungsoperatoren

Verrauschte Daten

Diskrete Daten

Asymptotisch optimale Mollifier

Beweisidee

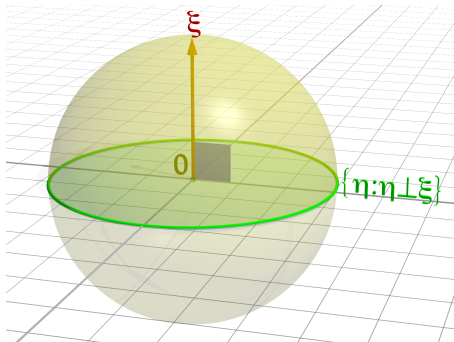
4. Anwendung

Numerische Resultate für Funk–Radon–Transformation

Verallgemeinerung: Kreismittelwert–Transformation

- ▶ Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \|\xi\| = 1\}$
- ▶ Funktion $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ auf der Sphäre
- ▶ **Funk-Radon-Transformation**
 berechnet die Integrale entlang aller
 Großkreise

$$\mathcal{R}f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = 0} f(\eta) \, ds(\eta)$$



Aufgabe

Berechne f aus den gegebenen Werten (inverses Problem)



Paul Funk.

Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.

Math. Ann., 74(2):278–300, June 1913.



S. Helgason.

The Radon Transform.

Birkhäuser, 2nd edition, 1999.



Alfred Karl Louis, Martin Riplinger, Malte Spiess, and Evgeny Spodarev.

Inversion algorithms for the spherical Radon and cosine transform.

Inverse Problems, 27(3):035015, March 2011.



Martin Riplinger and Malte Spiess.

Numerical inversion of the spherical Radon transform and the cosine transform using the approximate inverse with a special class of locally supported mollifiers.

J. Inverse Ill-Posed Probl., 22(4):497–536, December 2013.

Inhalt

1. Einleitung

2. Sphärische Faltungsoperatoren

Definition

Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen von Faltungsoperatoren

Klassifizierung durch Sobolevräume

Beispiele

3. Inversion sphärischer Faltungsoperatoren

Verrauschte Daten

Diskrete Daten

Asymptotisch optimale Mollifier

Beweisidee

4. Anwendung

Numerische Resultate für Funk–Radon–Transformation

Verallgemeinerung: Kreismittelwert–Transformation

Faltungsoperatoren auf der Sphäre

- ▶ Funktion $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ auf der Sphäre
- ▶ Faltungskern $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem Intervall

Definition

Der Operator \mathcal{M}_h der Faltung mit h ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_h f(\boldsymbol{\xi}) &= h \star f(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} f(\boldsymbol{\eta}) h(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}) \, ds(\boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^2. \end{aligned}$$

- Jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ lässt sich als Fourierreihe

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(n, k) Y_n^k$$

mit den Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n, k) := \int_{\mathbb{S}^2} f(\xi) \overline{Y_n^k(\xi)} d\xi$ schreiben

- Kugelflächenfunktionen Y_n^k sind Polynome vom Grad n

Funk-Hecke-Formel (für Faltungsoperatoren)

$$\mathcal{M}_h f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{\mathcal{M}}_h(n) \hat{f}(n, k) Y_n^k$$

mit

$$\hat{\mathcal{M}}_h(n) = 2\pi \int_{-1}^1 h(t) P_n(t) dt$$

P_n – Legendre-Polynom vom Grade n

- Jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ lässt sich als Fourierreihe

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(n, k) Y_n^k$$

mit den Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n, k) := \int_{\mathbb{S}^2} f(\xi) \overline{Y_n^k(\xi)} d\xi$ schreiben

- Kugelflächenfunktionen Y_n^k sind Polynome vom Grad n

Funk–Hecke–Formel (für Faltungsooperatoren)

$$\mathcal{M}_h f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{\mathcal{M}}_h(n) \hat{f}(n, k) Y_n^k$$

mit

$$\hat{\mathcal{M}}_h(n) = 2\pi \int_{-1}^1 h(t) P_n(t) dt$$

P_n – Legendre–Polynom vom Grade n

Definition

Sei $s \geq 0$. Der **Sobolevraum** $H^s(\mathbb{S}^2)$ ist die Abschließung des Raumes aller Polynome $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ bezüglich der Norm

$$\|f\|_s^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \left| \hat{f}(n, k) \right|^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^{2s}.$$

Annahme

Für $s > 0$ und $\beta > 0$ sei der Faltungsoperator

$$\mathcal{M} : H^s(\mathbb{S}^2) \rightarrow H^{s+\beta}(\mathbb{S}^2)$$

bijektiv und stetig (dann ist auch \mathcal{M}^{-1} stetig)

► ist erfüllt, falls $\hat{\mathcal{M}}(n) \sim n^{-\beta}$

Definition

Sei $s \geq 0$. Der **Sobolevraum** $H^s(\mathbb{S}^2)$ ist die Abschließung des Raumes aller Polynome $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ bezüglich der Norm

$$\|f\|_s^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \left| \hat{f}(n, k) \right|^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^{2s}.$$

Annahme

Für $s > 0$ und $\beta > 0$ sei der Faltungsoperator

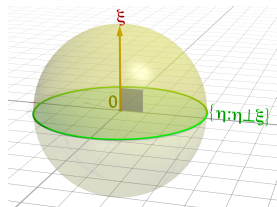
$$\mathcal{M} : H^s(\mathbb{S}^2) \rightarrow H^{s+\beta}(\mathbb{S}^2)$$

bijektiv und stetig (dann ist auch \mathcal{M}^{-1} stetig)

- ist erfüllt, falls $\hat{\mathcal{M}}(n) \sim n^{-\beta}$

- ▶ **Funk-Radon-Transformation** ist die Faltung mit der Delta-Distribution $h(t) = \delta(t)$

$$\mathcal{R} : H_e^s(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_e^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$$



- ▶ **Halbsphären-Transformation** ist die Faltung mit $h(t) = \mathbf{1}_{t \geq 0}(t)$

$$\mathcal{H} : H_o^s(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_o^{s+\frac{3}{2}}(\mathbb{S}^2)$$

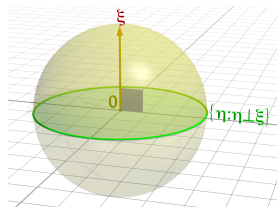
- ▶ **sphärische Kosinus-Transformation** ist die Faltung mit der Betragsfunktion $h(t) = |t|$

(Petty, 1961)

$$\mathcal{C} : H_e^s(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_e^{s+\frac{5}{2}}(\mathbb{S}^2)$$

- **Funk-Radon-Transformation** ist die Faltung mit der Delta-Distribution $h(t) = \delta(t)$

$$\mathcal{R} : H_e^s(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_e^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$$



- **Halbsphären-Transformation** ist die Faltung mit $h(t) = \mathbf{1}_{t \geq 0}(t)$

$$\mathcal{H} : H_o^s(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_o^{s+\frac{3}{2}}(\mathbb{S}^2)$$

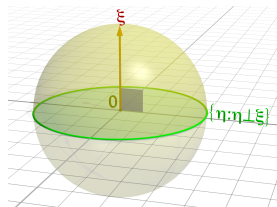
- **sphärische Kosinus-Transformation** ist die Faltung mit der Betragsfunktion $h(t) = |t|$

(Petty, 1961)

$$\mathcal{C} : H_e^s(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_e^{s+\frac{5}{2}}(\mathbb{S}^2)$$

- ▶ **Funk-Radon-Transformation** ist die Faltung mit der Delta-Distribution $h(t) = \delta(t)$

$$\mathcal{R} : H_e^s(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_e^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$$



- ▶ **Halbsphären-Transformation** ist die Faltung mit $h(t) = \mathbf{1}_{t \geq 0}(t)$

$$\mathcal{H} : H_o^s(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_o^{s+\frac{3}{2}}(\mathbb{S}^2)$$

- ▶ **sphärische Kosinus-Transformation** ist die Faltung mit der Betragsfunktion $h(t) = |t|$

(Petty, 1961)

$$\mathcal{C} : H_e^s(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_e^{s+\frac{5}{2}}(\mathbb{S}^2)$$

Inhalt

1. Einleitung

2. Sphärische Faltungsoperatoren

Definition

Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen von Faltungsoperatoren

Klassifizierung durch Sobolevräume

Beispiele

3. Inversion sphärischer Faltungsoperatoren

Verrauschte Daten

Diskrete Daten

Asymptotisch optimale Mollifier

Beweisidee

4. Anwendung

Numerische Resultate für Funk–Radon–Transformation

Verallgemeinerung: Kreismittelwert–Transformation

Gegeben: $g = \mathcal{M}f \in H^{s+\beta}(\mathbb{S}^2)$

Gesucht: $f \in H^s(\mathbb{S}^2)$

- ▶ Mithilfe der Zerlegung in Eigenwerte ergibt sich

$$f = \mathcal{M}^\dagger g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \frac{\hat{g}(n, k)}{\hat{\mathcal{M}}(n)} Y_n^k \quad (1)$$

- ▶ Summe konvergiert in $H^s \iff g \in H^{s+\beta}$
- ▶ Störung ε
- ▶ Idee: Multipliziere die Fourierkoeffizienten in (1) mit geeigneten Filterkoeffizienten $\hat{\psi}(n) \in [0, 1]$
- ▶ entspricht Faltung mit ψ : Mollifier-Methode (Louis & Maas, 1990)

Gegeben: $g = \mathcal{M}f \in H^{s+\beta}(\mathbb{S}^2)$

Gesucht: $f \in H^s(\mathbb{S}^2)$

- ▶ Mithilfe der Zerlegung in Eigenwerte ergibt sich

$$f = \mathcal{M}^\dagger g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \frac{\hat{g}(n, k)}{\hat{\mathcal{M}}(n)} Y_n^k \quad (1)$$

- ▶ Summe konvergiert in $H^s \iff g \in H^{s+\beta}$
- ▶ Störung ε
- ▶ Idee: Multipliziere die Fourierkoeffizienten in (1) mit geeigneten Filterkoeffizienten $\hat{\psi}(n) \in [0, 1]$
- ▶ entspricht Faltung mit ψ : Mollifier-Methode (Louis & Maas, 1990)

Gegeben: $g = \mathcal{M}f + \varepsilon$

Gesucht: $f \in H^s(\mathbb{S}^2)$

- ▶ Mithilfe der Zerlegung in Eigenwerte ergibt sich

$$f = \mathcal{M}^\dagger g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \frac{\hat{g}(n, k)}{\hat{\mathcal{M}}(n)} Y_n^k \quad (1)$$

- ▶ Summe konvergiert in $H^s \iff g \in H^{s+\beta}$

▶ Störung ε

- ▶ Idee: Multipliziere die Fourierkoeffizienten in (1) mit geeigneten Filterkoeffizienten $\hat{\psi}(n) \in [0, 1]$
- ▶ entspricht Faltung mit ψ : Mollifier-Methode (Louis & Maas, 1990)

Gegeben: $g = \mathcal{M}f + \varepsilon$

Gesucht: $f \in H^s(\mathbb{S}^2)$

- ▶ Mithilfe der Zerlegung in Eigenwerte ergibt sich

$$\psi \star f = \psi \star \mathcal{M}^\dagger g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{\psi}(n) \frac{\hat{g}(n, k)}{\hat{\mathcal{M}}(n)} Y_n^k \quad (1)$$

- ▶ Summe konvergiert in $H^s \iff g \in H^{s+\beta}$
- ▶ **Störung** ε
- ▶ Idee: Multipliziere die Fourierkoeffizienten in (1) mit geeigneten Filterkoeffizienten $\hat{\psi}(n) \in [0, 1]$
- ▶ entspricht Faltung mit ψ : **Mollifier-Methode** (Louis & Maas, 1990)

► Haben **diskrete, verrauschte Daten**

$$g(\boldsymbol{\xi}_m) = \mathcal{M}f(\boldsymbol{\xi}_m) + \varepsilon(\boldsymbol{\xi}_m), \quad m = 1, \dots, M.$$

► Idee: Benutze eine **Quadraturformel** für

$$\hat{g}(n, k) = \int_{\mathbb{S}^2} g(\boldsymbol{\xi}) \overline{Y_n^k(\boldsymbol{\xi})} \, d\boldsymbol{\xi} \approx \sum_{m=1}^M \omega_m g(\boldsymbol{\xi}_m) \overline{Y_n^k(\boldsymbol{\xi}_m)}$$

► Definieren: **Hyperinterpolation** vom Grade N

$$\mathcal{L}_N g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{m=1}^M \omega_m g(\boldsymbol{\xi}_m) \overline{Y_n^k(\boldsymbol{\xi}_m)} \right) Y_n^k$$

► Berechnen den **Schätzer**

$$\mathcal{E}_{N,\psi}(g) = \psi \star \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N(g).$$

- ▶ Haben **diskrete, verrauschte Daten**

$$g(\boldsymbol{\xi}_m) = \mathcal{M}f(\boldsymbol{\xi}_m) + \varepsilon(\boldsymbol{\xi}_m), \quad m = 1, \dots, M.$$

- ▶ Idee: Benutze eine **Quadraturformel** für

$$\hat{g}(n, k) = \int_{\mathbb{S}^2} g(\boldsymbol{\xi}) \overline{Y_n^k(\boldsymbol{\xi})} \, d\boldsymbol{\xi} \approx \sum_{m=1}^M \omega_m g(\boldsymbol{\xi}_m) \overline{Y_n^k(\boldsymbol{\xi}_m)}$$

- ▶ Definieren: **Hyperinterpolation** vom Grade N

$$\mathcal{L}_N g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{m=1}^M \omega_m g(\boldsymbol{\xi}_m) \overline{Y_n^k(\boldsymbol{\xi}_m)} \right) Y_n^k$$

- ▶ Berechnen den **Schätzer**

$$\mathcal{E}_{N,\psi}(g) = \psi \star \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N(g).$$

- ▶ Haben **diskrete, verrauschte Daten**

$$g(\boldsymbol{\xi}_m) = \mathcal{M}f(\boldsymbol{\xi}_m) + \varepsilon(\boldsymbol{\xi}_m), \quad m = 1, \dots, M.$$

- ▶ Idee: Benutze eine **Quadraturformel** für

$$\hat{g}(n, k) = \int_{\mathbb{S}^2} g(\boldsymbol{\xi}) \overline{Y_n^k(\boldsymbol{\xi})} \, d\boldsymbol{\xi} \approx \sum_{m=1}^M \omega_m g(\boldsymbol{\xi}_m) \overline{Y_n^k(\boldsymbol{\xi}_m)}$$

- ▶ Definieren: **Hyperinterpolation** vom Grade N

$$\mathcal{L}_N g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{m=1}^M \omega_m g(\boldsymbol{\xi}_m) \overline{Y_n^k(\boldsymbol{\xi}_m)} \right) Y_n^k$$

- ▶ Berechnen den **Schätzer**

$$\mathcal{E}_{N,\psi}(g) = \psi \star \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N(g).$$

► Hyperinterpolation

(Sloan, 1995) (Hesse & Sloan, 2006)

$$\mathcal{L}_N g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{m=1}^M \omega_m g(\xi_m) \overline{Y_n^k(\xi_m)} \right) Y_n^k$$

► \mathcal{L}_N ist **keine** Interpolation für $N \geq 3$

► Wir nennen \mathcal{L}_N **exakt**, falls sie eine Projektor ist, also $\mathcal{L}_N^2 = \mathcal{L}_N$

► Ist die Quadratur exakt für Polynome vom Grade $2N$, dann ist \mathcal{L}_N exakt

► Im Fall konstanter Gewichte $\omega_m = \frac{4\pi}{M}$ heißen die Punkte ξ_m von exakten Quadraturformeln **sphärische Designs**

► Es gibt sphärische Designs mit $M \sim N^2$ (Bondarenko et. al., 2010)

► Wenn die Quadraturknoten ξ_m „gut“ verteilt sind, dann gilt für die Gewichte (Pesenson & Geller, 2013)

$$\delta_1 \frac{4\pi}{M} \leq \omega_m \leq \delta_2 \frac{4\pi}{M}$$

► Hyperinterpolation

(Sloan, 1995) (Hesse & Sloan, 2006)

$$\mathcal{L}_N g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{m=1}^M \omega_m g(\xi_m) \overline{Y_n^k(\xi_m)} \right) Y_n^k$$

► \mathcal{L}_N ist **keine** Interpolation für $N \geq 3$

► Wir nennen \mathcal{L}_N **exakt**, falls sie eine Projektor ist, also $\mathcal{L}_N^2 = \mathcal{L}_N$

► Ist die Quadratur exakt für Polynome vom Grade $2N$, dann ist \mathcal{L}_N exakt

► Im Fall konstanter Gewichte $\omega_m = \frac{4\pi}{M}$ heißen die Punkte ξ_m von exakten Quadraturformeln **sphärische Designs**

► Es gibt sphärische Designs mit $M \sim N^2$ (Bondarenko et. al., 2010)

► Wenn die Quadraturknoten ξ_m „gut“ verteilt sind, dann gilt für die Gewichte (Pesenson & Geller, 2013)

$$\delta_1 \frac{4\pi}{M} \leq \omega_m \leq \delta_2 \frac{4\pi}{M}$$

► Hyperinterpolation

(Sloan, 1995) (Hesse & Sloan, 2006)

$$\mathcal{L}_N g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{m=1}^M \omega_m g(\xi_m) \overline{Y_n^k(\xi_m)} \right) Y_n^k$$

► \mathcal{L}_N ist **keine** Interpolation für $N \geq 3$

► Wir nennen \mathcal{L}_N **exakt**, falls sie eine Projektor ist, also $\mathcal{L}_N^2 = \mathcal{L}_N$

► Ist die Quadratur exakt für Polynome vom Grade $2N$, dann ist \mathcal{L}_N exakt

► Im Fall konstanter Gewichte $\omega_m = \frac{4\pi}{M}$ heißen die Punkte ξ_m von exakten Quadraturformeln **sphärische Designs**

► Es gibt sphärische Designs mit $M \sim N^2$ (Bondarenko et. al., 2010)

► Wenn die Quadraturknoten ξ_m „gut“ verteilt sind, dann gilt für die Gewichte (Pesenson & Geller, 2013)

$$\delta_1 \frac{4\pi}{M} \leq \omega_m \leq \delta_2 \frac{4\pi}{M}$$

► Hyperinterpolation

(Sloan, 1995) (Hesse & Sloan, 2006)

$$\mathcal{L}_N g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{m=1}^M \omega_m g(\xi_m) \overline{Y_n^k(\xi_m)} \right) Y_n^k$$

► \mathcal{L}_N ist **keine** Interpolation für $N \geq 3$

► Wir nennen \mathcal{L}_N **exakt**, falls sie eine Projektor ist, also $\mathcal{L}_N^2 = \mathcal{L}_N$

► Ist die Quadratur exakt für Polynome vom Grade $2N$, dann ist \mathcal{L}_N exakt

► Im Fall konstanter Gewichte $\omega_m = \frac{4\pi}{M}$ heißen die Punkte ξ_m von exakten Quadraturformeln **sphärische Designs**

► Es gibt sphärische Designs mit $M \sim N^2$ (Bondarenko et. al., 2010)

► Wenn die Quadraturknoten ξ_m „gut“ verteilt sind, dann gilt für die Gewichte (Pesenson & Geller, 2013)

$$\delta_1 \frac{4\pi}{M} \leq \omega_m \leq \delta_2 \frac{4\pi}{M}$$

► Mittlerer integrierter quadratischer Fehler **MISE**

$$\mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2 = \mathbb{E} \int_{\mathbb{S}^2} |f(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi}$$

► Seien $s, S \geq 0$. Definieren die Funktionenklasse

$$\mathcal{F}(s, S) = \{f \in H^s(\mathbb{S}^2) : \|f\|_s \leq S\}$$

► Betrachten **maximales Risiko**

$$\sup_{f \in \mathcal{F}(s, S)} \mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2$$

► **Minimax-Fehler**

$$\inf_{\psi} \sup_{f \in \mathcal{F}(s, S)} \mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2$$

- Mittlerer integrierter quadratischer Fehler **MISE**

$$\mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2 = \mathbb{E} \int_{\mathbb{S}^2} |f(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi}$$

- Seien $s, S \geq 0$. Definieren die Funktionenklasse

$$\mathcal{F}(s, S) = \{f \in H^s(\mathbb{S}^2) : \|f\|_s \leq S\}$$

- Betrachten **maximales Risiko**

$$\sup_{f \in \mathcal{F}(s, S)} \mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2$$

- **Minimax-Fehler**

$$\inf_{\psi} \sup_{f \in \mathcal{F}(s, S)} \mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2$$

- Mittlerer integrierter quadratischer Fehler **MISE**

$$\mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2 = \mathbb{E} \int_{\mathbb{S}^2} |f(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi}$$

- Seien $s, S \geq 0$. Definieren die Funktionenklasse

$$\mathcal{F}(s, S) = \{f \in H^s(\mathbb{S}^2) : \|f\|_s \leq S\}$$

- Betrachten **maximales Risiko**

$$\sup_{f \in \mathcal{F}(s, S)} \mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2$$

- **Minimax-Fehler**

$$\inf_{\psi} \sup_{f \in \mathcal{F}(s, S)} \mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2$$

- Mittlerer integrierter quadratischer Fehler **MISE**

$$\mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2 = \mathbb{E} \int_{\mathbb{S}^2} |f(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi}$$

- Seien $s, S \geq 0$. Definieren die Funktionenklasse

$$\mathcal{F}(s, S) = \{f \in H^s(\mathbb{S}^2) : \|f\|_s \leq S\}$$

- Betrachten **maximales Risiko**

$$\sup_{f \in \mathcal{F}(s, S)} \mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2$$

- **Minimax-Fehler**

$$\inf_{\psi} \sup_{f \in \mathcal{F}(s, S)} \mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2$$

- ▶ Seien $s > \frac{1-\beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 2\beta + 5}$ und $S > 0$
- ▶ Faltungsoperator $\mathcal{M} : H^s(\mathbb{S}^2) \rightarrow H^{s+\beta}(\mathbb{S}^2)$ bijektiv und stetig
- ▶ Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei die Hyperinterpolation \mathcal{L}_N exakt mit $M \sim N^2$ Quadraturknoten und annähernd konstanten Gewichten
- ▶ Datenfehler $\varepsilon(\xi_m)$ sei unkorreliert mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2

Theorem

Es existiert eine asymptotisch optimale Familie von Mollifiern $\{\psi_L^s\}_{L \in \mathbb{R}_+}$ für die Funktionenklasse $\mathcal{F}(s, S)$: Für $N \rightarrow \infty$ gibt es Parameter $L(N)$ sodass

$$\sup_{f \in \mathcal{F}(s, S)} \mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N, \psi_{L(N)}^s}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2$$

$$\simeq \inf_{\psi} \sup_{f \in \mathcal{F}(s, S)} \mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N, \psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2 \simeq \text{konst} \cdot M^{\frac{-s}{s+\beta+1}}.$$

- ▶ Seien $s > \frac{1-\beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 2\beta + 5}$ und $S > 0$
- ▶ Faltungsoperator $\mathcal{M} : H^s(\mathbb{S}^2) \rightarrow H^{s+\beta}(\mathbb{S}^2)$ bijektiv und stetig
- ▶ Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei die Hyperinterpolation \mathcal{L}_N exakt mit $M \sim N^2$ Quadraturknoten und annähernd konstanten Gewichten
- ▶ Datenfehler $\varepsilon(\xi_m)$ sei unkorreliert mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2

Theorem

Es existiert eine asymptotisch optimale Familie von Mollifiern $\{\psi_L^s\}_{L \in \mathbb{R}_+}$ für die Funktionenklasse $\mathcal{F}(s, S)$: Für $N \rightarrow \infty$ gibt es Parameter $L(N)$ sodass

$$\sup_{f \in \mathcal{F}(s, S)} \mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N, \psi_{L(N)}^s}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2$$

$$\simeq \inf_{\psi} \sup_{f \in \mathcal{F}(s, S)} \mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N, \psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2 \simeq \text{konst} \cdot M^{\frac{-s}{s+\beta+1}}.$$

1. Zerlegen den MISE in **Bias** und **Varianz**

$$\mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2 = \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f)\|_{L^2}^2 + \mathbb{E} \|\mathcal{E}_{N,\psi}\varepsilon\|_{L^2}^2$$

2. Varianz-Term $\mathbb{E} \|\mathcal{E}_{N,\psi}\varepsilon\|_{L^2}^2 \approx \frac{4\pi\sigma}{M} \|\mathcal{M}^\dagger\psi\|_{L^2}^2$

3. Zerlegen den Bias-Term in **Glättungs-** und **Diskretisierungs-Fehler**

$$\|f - \psi \star \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N(\mathcal{M}f)\|_{L^2} \leq \|f - \psi \star f\| + \|\psi \star (f - \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N \mathcal{M}f)\|$$

4. Abschätzung des Glättungs-Fehlers

$$\|f - \psi \star f\|^2 \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{|1 - \hat{\psi}(n)|^2}{(n + \frac{1}{2})^{2s}} \|f\|_s^2$$

5. Definiere Mollifier ψ_L^s , der sowohl Varianz-Fehler als auch Glättungs-Fehler verringert

6. **Diskretisierungs-Fehler** ist vernachlässigbar klein, falls f glatt genug ist

1. Zerlegen den MISE in **Bias** und **Varianz**

$$\mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2 = \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f)\|_{L^2}^2 + \mathbb{E} \|\mathcal{E}_{N,\psi}\varepsilon\|_{L^2}^2$$

2. Varianz-Term $\mathbb{E} \|\mathcal{E}_{N,\psi}\varepsilon\|_{L^2}^2 \approx \frac{4\pi\sigma}{M} \|\mathcal{M}^\dagger\psi\|_{L^2}^2$

3. Zerlegen den Bias-Term in **Glättungs-** und **Diskretisierungs-Fehler**

$$\|f - \psi \star \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N(\mathcal{M}f)\|_{L^2} \leq \|f - \psi \star f\| + \|\psi \star (f - \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N \mathcal{M}f)\|$$

4. Abschätzung des Glättungs-Fehlers

$$\|f - \psi \star f\|^2 \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{|1 - \hat{\psi}(n)|^2}{(n + \frac{1}{2})^{2s}} \|f\|_s^2$$

5. Definiere Mollifier ψ_L^s , der sowohl Varianz-Fehler als auch Glättungs-Fehler verringert

6. **Diskretisierungs-Fehler** ist vernachlässigbar klein, falls f glatt genug ist

1. Zerlegen den MISE in **Bias** und **Varianz**

$$\mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2 = \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f)\|_{L^2}^2 + \mathbb{E} \|\mathcal{E}_{N,\psi}\varepsilon\|_{L^2}^2$$

2. Varianz-Term $\mathbb{E} \|\mathcal{E}_{N,\psi}\varepsilon\|_{L^2}^2 \approx \frac{4\pi\sigma}{M} \|\mathcal{M}^\dagger\psi\|_{L^2}^2$

3. Zerlegen den Bias-Term in **Glättungs-** und **Diskretisierungs-Fehler**

$$\|f - \psi \star \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N(\mathcal{M}f)\|_{L^2} \leq \|f - \psi \star f\| + \|\psi \star (f - \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N \mathcal{M}f)\|$$

4. Abschätzung des Glättungs-Fehlers

$$\|f - \psi \star f\|^2 \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{|1 - \hat{\psi}(n)|^2}{(n + \frac{1}{2})^{2s}} \|f\|_s^2$$

5. Definiere Mollifier ψ_L^s , der sowohl Varianz-Fehler als auch Glättungs-Fehler verringert

6. **Diskretisierungs-Fehler** ist vernachlässigbar klein, falls f glatt genug ist

1. Zerlegen den MISE in **Bias** und **Varianz**

$$\mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2 = \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f)\|_{L^2}^2 + \mathbb{E} \|\mathcal{E}_{N,\psi}\varepsilon\|_{L^2}^2$$

2. Varianz-Term $\mathbb{E} \|\mathcal{E}_{N,\psi}\varepsilon\|_{L^2}^2 \approx \frac{4\pi\sigma}{M} \|\mathcal{M}^\dagger\psi\|_{L^2}^2$

3. Zerlegen den Bias-Term in **Glättungs-** und **Diskretisierungs-**Fehler

$$\|f - \psi \star \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N(\mathcal{M}f)\|_{L^2} \leq \|f - \psi \star f\| + \|\psi \star (f - \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N \mathcal{M}f)\|$$

4. Abschätzung des Glättungs-Fehlers

$$\|f - \psi \star f\|^2 \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{|1 - \hat{\psi}(n)|^2}{(n + \frac{1}{2})^{2s}} \|f\|_s^2$$

5. Definiere Mollifier ψ_L^s , der sowohl Varianz-Fehler als auch Glättungs-Fehler verringert

6. **Diskretisierungs-Fehler** ist vernachlässigbar klein, falls f glatt genug ist

1. Zerlegen den MISE in **Bias** und **Varianz**

$$\mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2 = \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f)\|_{L^2}^2 + \mathbb{E} \|\mathcal{E}_{N,\psi}\varepsilon\|_{L^2}^2$$

2. Varianz-Term $\mathbb{E} \|\mathcal{E}_{N,\psi}\varepsilon\|_{L^2}^2 \approx \frac{4\pi\sigma}{M} \|\mathcal{M}^\dagger\psi\|_{L^2}^2$

3. Zerlegen den Bias-Term in **Glättungs-** und **Diskretisierungs-**Fehler

$$\|f - \psi \star \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N(\mathcal{M}f)\|_{L^2} \leq \|f - \psi \star f\| + \|\psi \star (f - \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N \mathcal{M}f)\|$$

4. Abschätzung des Glättungs-Fehlers

$$\|f - \psi \star f\|^2 \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{|1 - \hat{\psi}(n)|^2}{(n + \frac{1}{2})^{2s}} \|f\|_s^2$$

5. Definiere Mollifier ψ_L^s , der sowohl Varianz-Fehler als auch Glättungs-Fehler verringert

6. Diskretisierungs-Fehler ist vernachlässigbar klein, falls f glatt genug ist

1. Zerlegen den MISE in **Bias** und **Varianz**

$$\mathbb{E} \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f + \varepsilon)\|_{L^2}^2 = \|f - \mathcal{E}_{N,\psi}(\mathcal{M}f)\|_{L^2}^2 + \mathbb{E} \|\mathcal{E}_{N,\psi}\varepsilon\|_{L^2}^2$$

2. Varianz-Term $\mathbb{E} \|\mathcal{E}_{N,\psi}\varepsilon\|_{L^2}^2 \approx \frac{4\pi\sigma}{M} \|\mathcal{M}^\dagger\psi\|_{L^2}^2$

3. Zerlegen den Bias-Term in **Glättungs-** und **Diskretisierungs-**Fehler

$$\|f - \psi \star \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N(\mathcal{M}f)\|_{L^2} \leq \|f - \psi \star f\| + \|\psi \star (f - \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}_N \mathcal{M}f)\|$$

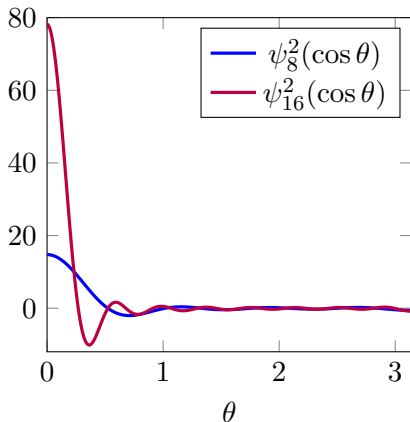
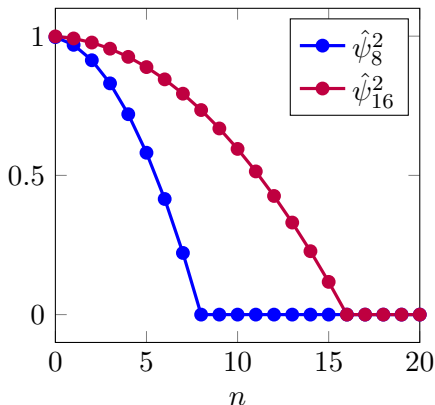
4. Abschätzung des Glättungs-Fehlers

$$\|f - \psi \star f\|^2 \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{|1 - \hat{\psi}(n)|^2}{(n + \frac{1}{2})^{2s}} \|f\|_s^2$$

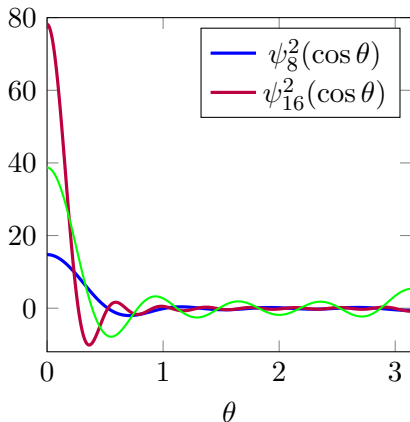
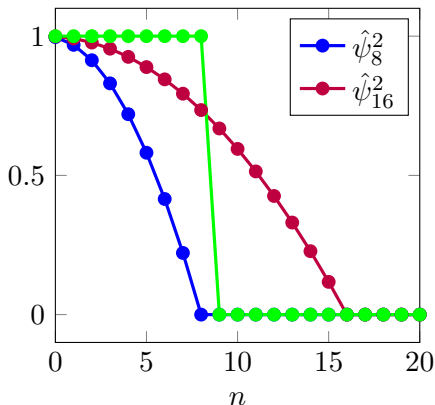
5. Definiere Mollifier ψ_L^s , der sowohl Varianz-Fehler als auch Glättungs-Fehler verringert

6. **Diskretisierungs-Fehler** ist vernachlässigbar klein, falls f glatt genug ist

$$\psi_L^s = \sum_{n=0}^L \frac{2n+1}{4\pi} \left(1 - \left(\frac{n + \frac{1}{2}}{L + \frac{1}{2}} \right)^s \right) P_n$$



$$\psi_L^s = \sum_{n=0}^L \frac{2n+1}{4\pi} \left(1 - \left(\frac{n + \frac{1}{2}}{L + \frac{1}{2}} \right)^s \right) P_n$$



Inhalt

1. Einleitung

2. Sphärische Faltungsoperatoren

Definition

Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen von Faltungsoperatoren

Klassifizierung durch Sobolevräume

Beispiele

3. Inversion sphärischer Faltungsoperatoren

Verrauschte Daten

Diskrete Daten

Asymptotisch optimale Mollifier

Beweisidee

4. Anwendung

Numerische Resultate für Funk–Radon–Transformation

Verallgemeinerung: Kreismittelwert–Transformation

Algorithmus für die Berechnung des Schätzers

Gegeben: $g(\boldsymbol{\xi}_m)$ und Quadraturgewichte ω_m , $m = 1, \dots, M$

1. Berechne Fourierkoeffizienten $\widehat{\mathcal{L}}_N g(n, k) = \sum_{m=1}^M \omega_m g(\boldsymbol{\xi}_m) \overline{Y_n^k(\boldsymbol{\xi}_m)}$

2. Berechne Regularisierung $\widehat{\mathcal{E}}_{N,\psi}(n, k) = \frac{\hat{\psi}(n)}{\hat{\mathcal{M}}(n)} \widehat{\mathcal{L}}_N g(n, k)$

3. Berechne Schätzer $\mathcal{E}_{N,\psi} g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \widehat{\mathcal{E}}_{N,\psi}(n, k) Y_n^k$

- ▶ Aufwand: $\mathcal{O}(N^2 \log^2 N)$ mit schneller sphärischer Fouriertransformation
 (Driscoll & Healy, 1994) (Potts, Steidl & Tasche, 1998) (Kunis & Potts, 2003)
 (Keiner & Potts, 2008)
- ▶ Nutzen approximative sphärische Designs
 (Gräf & Potts, 2012)

Algorithmus für die Berechnung des Schätzers

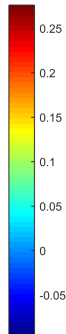
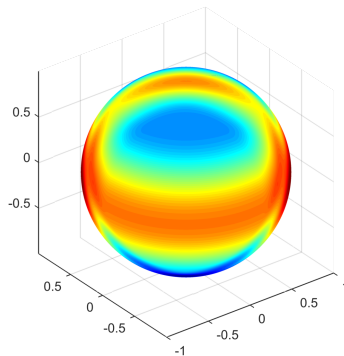
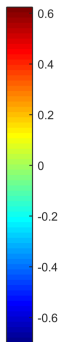
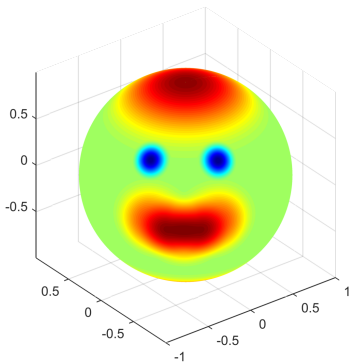
Gegeben: $g(\boldsymbol{\xi}_m)$ und Quadraturgewichte ω_m , $m = 1, \dots, M$

1. Berechne Fourierkoeffizienten $\widehat{\mathcal{L}}_N g(n, k) = \sum_{m=1}^M \omega_m g(\boldsymbol{\xi}_m) \overline{Y_n^k(\boldsymbol{\xi}_m)}$

2. Berechne Regularisierung $\widehat{\mathcal{E}}_{N,\psi}(n, k) = \frac{\hat{\psi}(n)}{\hat{\mathcal{M}}(n)} \widehat{\mathcal{L}}_N g(n, k)$

3. Berechne Schätzer $\mathcal{E}_{N,\psi} g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \widehat{\mathcal{E}}_{N,\psi}(n, k) Y_n^k$

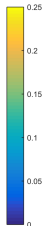
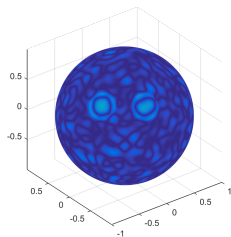
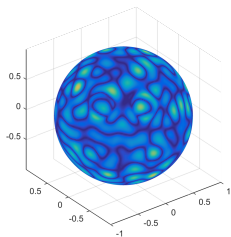
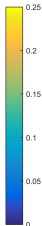
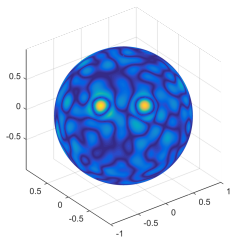
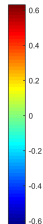
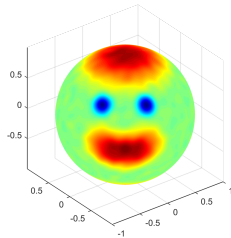
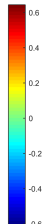
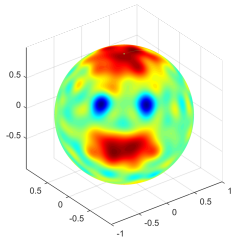
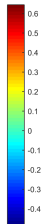
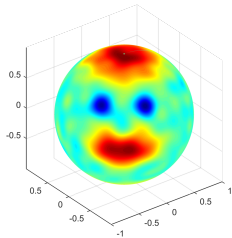
- ▶ Aufwand: $\mathcal{O}(N^2 \log^2 N)$ mit schneller sphärischer Fouriertransformation (Driscoll & Healy, 1994) (Potts, Steidl & Tasche, 1998) (Kunis & Potts, 2003) (Keiner & Potts, 2008)
- ▶ Nutzen approximative sphärische Designs (Gräf & Potts, 2012)



Testfunktion f (quadratischer Spline)

Funk–Radon–Transformierte von f

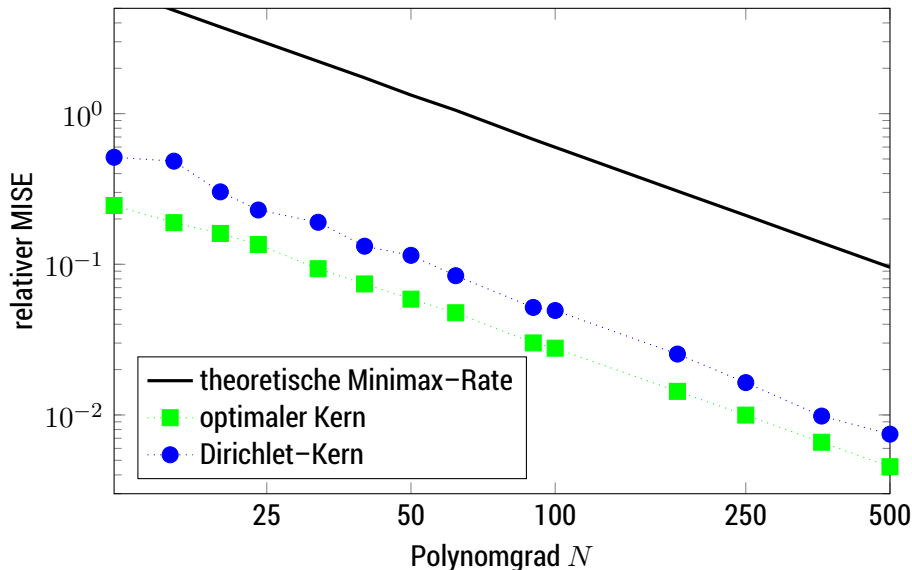
$$\mathcal{R}f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = 0} f(\eta) \, ds(\eta)$$



optimaler Kern
N=100

Dirichlet-Kern
N=100

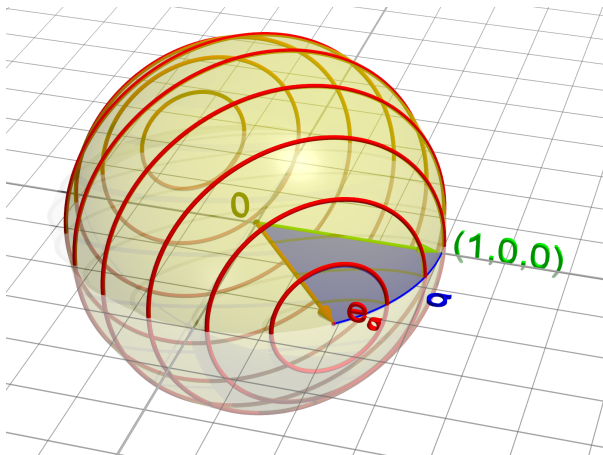
optimaler Kern
N=500



Kreise senkrecht zum Äquator

(Gindkin et. al., 1993) (Zangerl & Scherzer, 2010)

$$\mathcal{T}f(\sigma, t) := \frac{1}{2\pi\sqrt{1-t^2}} \int_{\langle \eta, e_\sigma \rangle = t} f(\eta) \, ds(\eta), \quad \sigma \in \mathbb{S}^1, t \in [-1, 1]$$



- ▶ Wichtigster Unterschied $\mathcal{T} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$
- ▶ Basisfunktionen $B_n^k(\sigma, t) = e^{ik\sigma} P_n(t)$
- ▶ Sei $s > (1 + \sqrt{10})/2$, $S > 0$ und $\sigma > 0$
- ▶ Für jedes sei \mathcal{L}_N exakt und erfülle $M \in \mathcal{O}(N^2)$
- ▶ Regularitätsbedingung an Quadraturformel:

$$\underline{\gamma} \frac{4\pi}{M} \leq \sum_{m=1}^M |w_m B_{n,k}(\sigma_m, t_m)|^2 \leq \bar{\gamma} \frac{4\pi}{M}$$

- ▶ Datenfehler $\varepsilon(m)$ unkorreliert mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2

Theorem

Die Familie $\{\psi_L\}_{L \in \mathbb{R}_+}$ ist asymptotisch optimal für die Inversion der Kreismittelwert-Transformation \mathcal{T}

- ▶ Wichtigster Unterschied $\mathcal{T} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$
- ▶ Basisfunktionen $B_n^k(\sigma, t) = e^{ik\sigma} P_n(t)$
- ▶ Sei $s > (1 + \sqrt{10})/2$, $S > 0$ und $\sigma > 0$
- ▶ Für jedes sei \mathcal{L}_N exakt und erfülle $M \in \mathcal{O}(N^2)$
- ▶ Regularitätsbedingung an Quadraturformel:

$$\underline{\gamma} \frac{4\pi}{M} \leq \sum_{m=1}^M |w_m B_{n,k}(\sigma_m, t_m)|^2 \leq \bar{\gamma} \frac{4\pi}{M}$$

- ▶ Datenfehler $\varepsilon(m)$ unkorreliert mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2

Theorem

Die Familie $\{\psi_L\}_{L \in \mathbb{R}_+}$ ist asymptotisch optimal für die Inversion der Kreismittelwert-Transformation \mathcal{T}

- ▶ Wichtigster Unterschied $\mathcal{T} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$
- ▶ Basisfunktionen $B_n^k(\sigma, t) = e^{ik\sigma} P_n(t)$
- ▶ Sei $s > (1 + \sqrt{10})/2$, $S > 0$ und $\sigma > 0$
- ▶ Für jedes sei \mathcal{L}_N exakt und erfülle $M \in \mathcal{O}(N^2)$
- ▶ Regularitätsbedingung an Quadraturformel:

$$\underline{\gamma} \frac{4\pi}{M} \leq \sum_{m=1}^M |w_m B_{n,k}(\sigma_m, t_m)|^2 \leq \bar{\gamma} \frac{4\pi}{M}$$

- ▶ Datenfehler $\varepsilon(m)$ unkorreliert mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2

Theorem

Die Familie $\{\psi_L\}_{L \in \mathbb{R}_+}$ ist asymptotisch optimal für die Inversion der Kreismittelwert-Transformation \mathcal{T}

\endinput