Eine Verallgemeinerung der Funk–Radon–Transformation für Kleinkreise

Michael Quellmalz

TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik

26. Rhein–Ruhr–Workshop
29. Januar 2016

- Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{\xi}\| = 1\}$
- Funktion $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$
- Kreise auf der Sphäre sind Schnitte der Sphäre mit Ebenen:

$$\{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^2 : \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = x\},$$

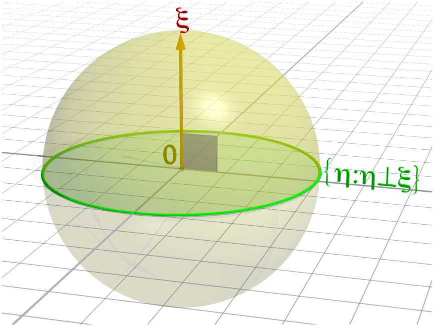
für $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^2$, $x \in [-1, 1]$

- **Funk–Radon–Transformation**

$$\mathcal{F}\colon C(\mathbb{S}^2) \to C(\mathbb{S}^2),$$

$$\mathcal{F}f(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = 0} f(\boldsymbol{\eta})\, \mathrm{d}\lambda(\boldsymbol{\eta})$$

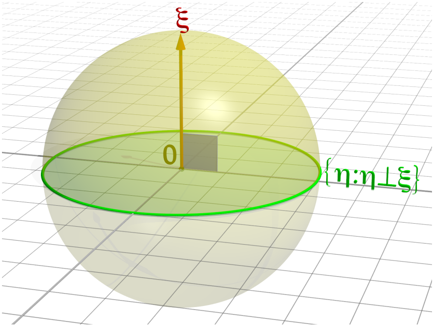
integriert f entlang aller Großkreise



- Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{\xi}\| = 1\}$
- Funktion $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$
- Kreise auf der Sphäre sind Schnitte der Sphäre mit Ebenen:

$$\{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^2 : \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = x\},$$

für $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^2$, $x \in [-1, 1]$



- Funk–Radon–Transformation

$$\mathcal{F}\colon C(\mathbb{S}^2) \to C(\mathbb{S}^2),$$

$$\mathcal{F}f(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = 0} f(\boldsymbol{\eta})\, \mathrm{d}\lambda(\boldsymbol{\eta})$$

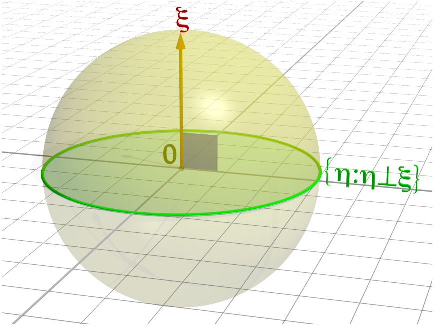
integriert f entlang aller Großkreise

- Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{\xi}\| = 1\}$
- Funktion $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$

- Kreise auf der Sphäre sind Schnitte der Sphäre mit Ebenen:

$$\{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^2 : \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = x\},$$

für $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^2$, $x \in [-1, 1]$



- **Funk–Radon–Transformation**

$$\mathcal{F}\colon C(\mathbb{S}^2) \to C(\mathbb{S}^2),$$

$$\mathcal{F}f(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = 0} f(\boldsymbol{\eta}) \, \mathrm{d}\lambda(\boldsymbol{\eta})$$

integriert f entlang aller Großkreise

Verallgemeinerte Radon–Transformation

[Salman, 2015]

Ersetzen 0 durch beliebigen Punkt

$$\zeta = (0,0,z)^\top, \qquad 0 \le z < 1$$

im Inneren der Kugel.

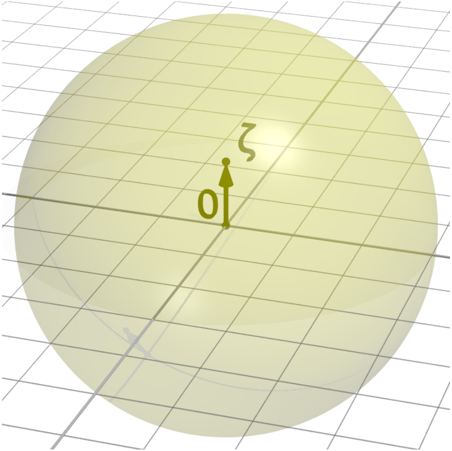
Kreis durch ζ ist

$$\{\eta \in \mathbb{S}^2 : \langle \xi, \eta \rangle = \underbrace{\langle \xi, \zeta \rangle}_{= z\xi_3}\}.$$

Definieren

$$\mathcal{U} \colon C(\mathbb{S}^2) \to C(\mathbb{S}^2),$$

$$\mathcal{U}f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = z\xi_3} f(\eta) \,\mathrm{d}\lambda(\eta).$$



Verallgemeinerte Radon–Transformation

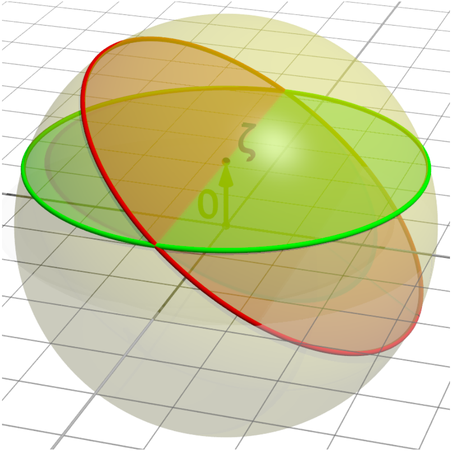
[Salman, 2015]

Ersetzen 0 durch beliebigen Punkt

$$\zeta = (0,0,z)^\top, \qquad 0 \le z < 1$$

im Inneren der Kugel.
Kreis durch ζ ist

$$\{\eta \in \mathbb{S}^2 : \langle \xi, \eta \rangle = \underbrace{\langle \xi, \zeta \rangle}_{=z\xi_3}\}.$$



Definieren

$$\mathcal{U} \colon C(\mathbb{S}^2) \to C(\mathbb{S}^2),$$

$$\mathcal{U}f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = z\xi_3} f(\eta)\, \mathrm{d}\lambda(\eta).$$

Verallgemeinerte Radon–Transformation

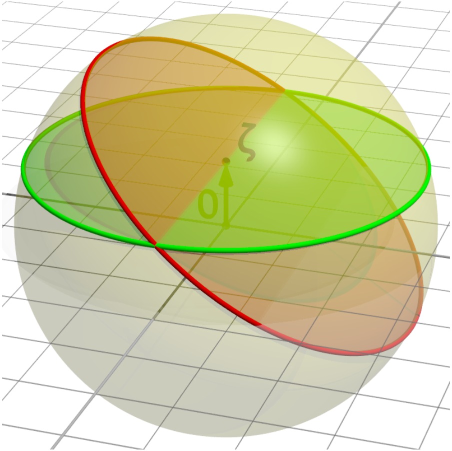
[Salman, 2015]

Ersetzen 0 durch beliebigen Punkt

$$\zeta = (0, 0, z)^\top, \qquad 0 \leq z < 1$$

im Inneren der Kugel.
Kreis durch ζ ist

$$\{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^2 : \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \underbrace{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta} \rangle}_{= z\xi_3}\}.$$



Definieren

$$\mathcal{U} \colon C(\mathbb{S}^2) \to C(\mathbb{S}^2),$$

$$\mathcal{U}f(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = z\xi_3} f(\boldsymbol{\eta}) \, \mathrm{d}\lambda(\boldsymbol{\eta}).$$

Was über die Funk–Radon–Transformation bekannt ist

Satz [Strichartz, 1981]

Die Funk–Radon–Transformation

$$\mathcal{F}\colon L^2_{\mathrm{e}}(\mathbb{S}^2) \to H^{1/2}_{\mathrm{e}}(\mathbb{S}^2)$$

ist stetig und bijektiv.
Der Nullraum besteht aus den ungeraden Funktionen $f(\boldsymbol{\xi}) = -f(-\boldsymbol{\xi})$.

Fragestellung

Wie verhält es sich mit der verallgemeinerten Radon–Transformation?

Was über die Funk–Radon–Transformation bekannt ist

Satz [Strichartz, 1981]

Die Funk–Radon–Transformation

$$\mathcal{F}\colon L^2_{\mathrm{e}}(\mathbb{S}^2) \to H^{1/2}_{\mathrm{e}}(\mathbb{S}^2)$$

ist stetig und bijektiv.
Der Nullraum besteht aus den ungeraden Funktionen $f(\boldsymbol{\xi}) = -f(-\boldsymbol{\xi})$.

Fragestellung

Wie verhält es sich mit der verallgemeinerten Radon–Transformation?

Aus Großkreisen werden Kleinkreise

Definition

Definieren die Abbildung

$$h\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2, \quad h = \pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi$$

bestehend aus

1. Stereografischer Projektion $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$
2. Skalierung in der Ebene $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x} \mapsto \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\,\boldsymbol{x}$
3. Inverser stereografischer Projektion $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$

Wir zeigen

h bildet Großkreise auf Kleinkreise durch ζ ab.

Aus Großkreisen werden Kleinkreise

Definition

Definieren die Abbildung

$$h \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2, \quad h = \pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi$$

bestehend aus

1. Stereografischer Projektion $\pi \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$
2. Skalierung in der Ebene $\sigma \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x} \mapsto \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\,\boldsymbol{x}$
3. Inverser stereografischer Projektion $\pi^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$

Wir zeigen

h bildet Großkreise auf Kleinkreise durch ζ ab.

Aus Großkreisen werden Kleinkreise

Definition

Definieren die Abbildung

$$h\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2, \quad h = \pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi$$

bestehend aus

1. Stereografischer Projektion $\pi\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$
2. Skalierung in der Ebene $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x} \mapsto \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\,\boldsymbol{x}$
3. Inverser stereografischer Projektion $\pi^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$

Wir zeigen

h bildet Großkreise auf Kleinkreise durch ζ ab.

Aus Großkreisen werden Kleinkreise

Definition

Definieren die Abbildung

$$h\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2, \quad h = \pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi$$

bestehend aus

1. Stereografischer Projektion $\pi\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$
2. Skalierung in der Ebene $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x} \mapsto \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\,\boldsymbol{x}$
3. Inverser stereografischer Projektion $\pi^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$

Wir zeigen

h bildet Großkreise auf Kleinkreise durch ζ ab.

Aus Großkreisen werden Kleinkreise

Definition

Definieren die Abbildung

$$h\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2, \quad h = \pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi$$

bestehend aus

1. Stereografischer Projektion $\pi\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$
2. Skalierung in der Ebene $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x} \mapsto \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\,\boldsymbol{x}$
3. Inverser stereografischer Projektion $\pi^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$

Wir zeigen

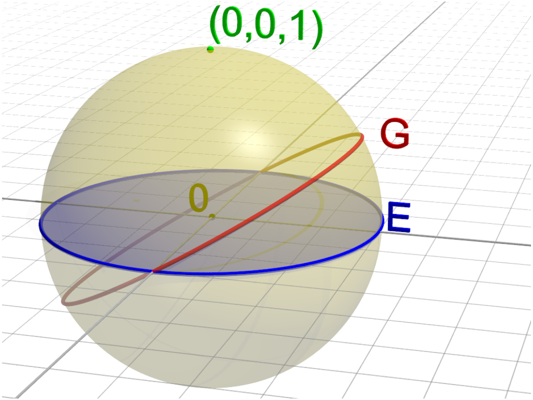
h bildet Großkreise auf Kleinkreise durch ζ ab.

1) Stereografische Projektion π

- G ... Großkreis auf $\mathbb{S}^2$
- E ... Äquator von $\mathbb{S}^2$

- G schneidet E in zwei gegenüberliegenden Punkten (oder ist gleich E)

- $\pi(E) = E$
- $\pi(G)$ ist Kreis oder Gerade und schneidet $\pi(E)$ in zwei gegenüberliegenden Punkten

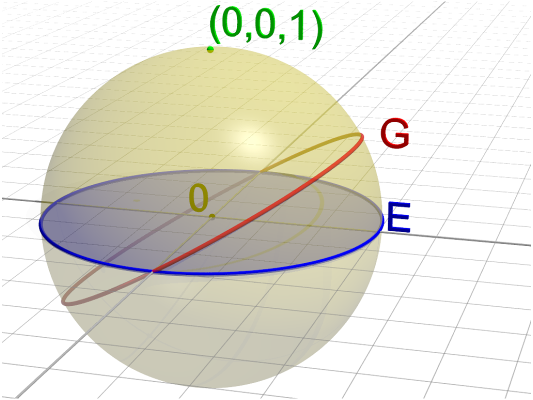


1) Stereografische Projektion π

- G ... Großkreis auf $\mathbb{S}^2$
- E ... Äquator von $\mathbb{S}^2$

- G schneidet E in zwei gegenüberliegenden Punkten (oder ist gleich E)

- $\pi(E) = E$
- $\pi(G)$ ist Kreis oder Gerade und schneidet $\pi(E)$ in zwei gegenüberliegenden Punkten

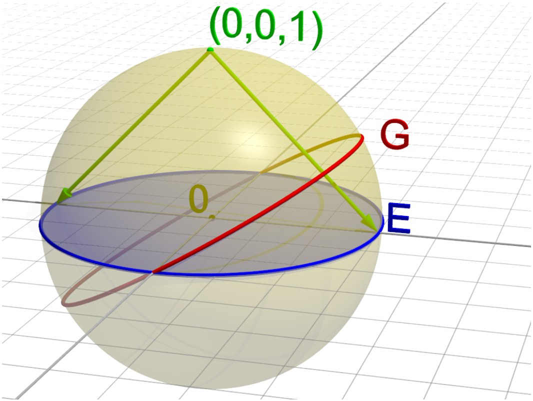


1) Stereografische Projektion π

- G ... Großkreis auf $\mathbb{S}^2$
- E ... Äquator von $\mathbb{S}^2$

- G schneidet E in zwei gegenüberliegenden Punkten (oder ist gleich E)

- $\pi(E) = E$
- $\pi(G)$ ist Kreis oder Gerade und schneidet $\pi(E)$ in zwei gegenüberliegenden Punkten

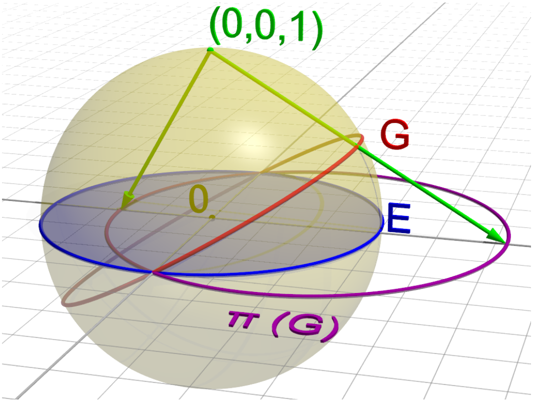


1) Stereografische Projektion π

- G ... Großkreis auf $\mathbb{S}^2$
- E ... Äquator von $\mathbb{S}^2$

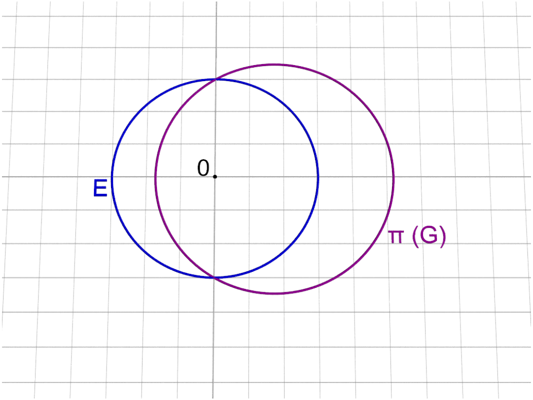
- G schneidet E in zwei gegenüberliegenden Punkten (oder ist gleich E)

- $\pi(E) = E$
- $\pi(G)$ ist Kreis oder Gerade und schneidet $\pi(E)$ in zwei gegenüberliegenden Punkten



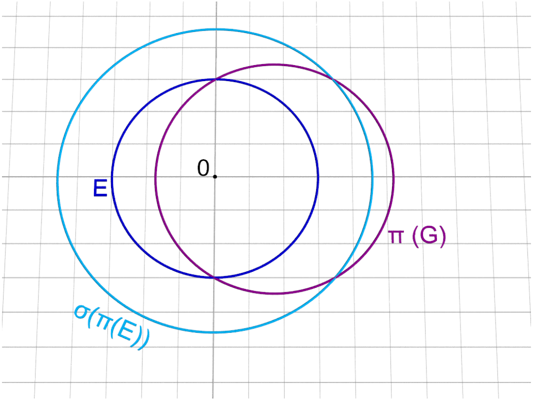
2) Skalierung σ in der Ebene

- Zentrische Streckung um 0 mit Faktor $s = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$
- Einheitskreis wird zu Kreis $\sigma(\pi(E))$ mit Radius s
- $\sigma(\pi(G))$ schneidet diesen Kreis in gegenüberliegenden Punkten



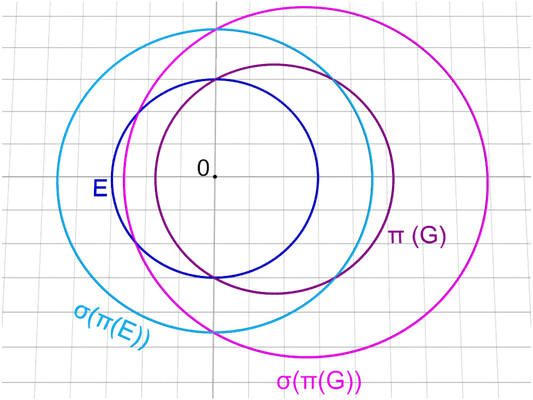
2) Skalierung σ in der Ebene

- Zentrische Streckung um 0 mit Faktor $s = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$
- Einheitskreis wird zu Kreis $\sigma(\pi(E))$ mit Radius s
- $\sigma(\pi(G))$ schneidet diesen Kreis in gegenüberliegenden Punkten



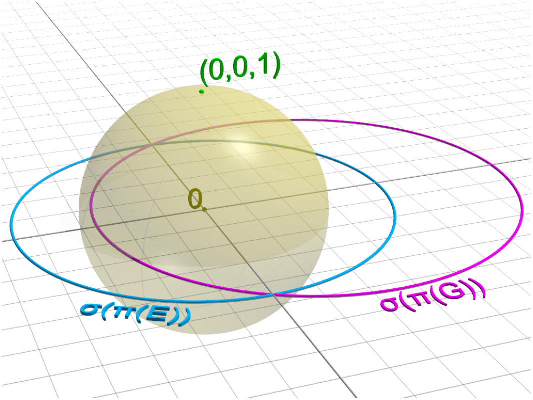
2) Skalierung σ in der Ebene

- Zentrische Streckung um 0 mit Faktor $s = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$
- Einheitskreis wird zu Kreis $\sigma(\pi(E))$ mit Radius s
- $\sigma(\pi(G))$ schneidet diesen Kreis in gegenüberliegenden Punkten



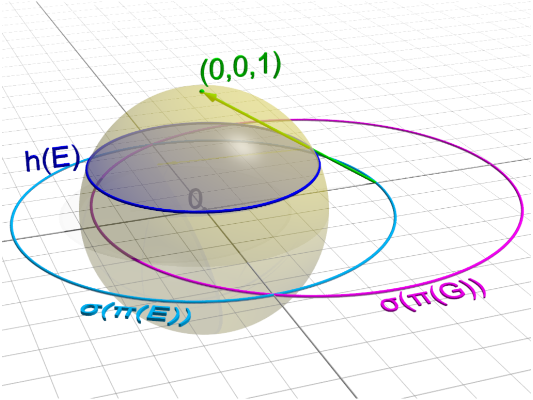
3) Inverse stereografische Projektion π^{-1}

- Kreis mit Radius s wird zu Breitenkreis zur Breite z; $h(E)$
- $h(G) = \pi^{-1}(\sigma(\pi(G)))$ schneidet Breitenkreis z in gegenüberliegenden Punkten
- $h(G)$ ist Kleinkreis durch ζ



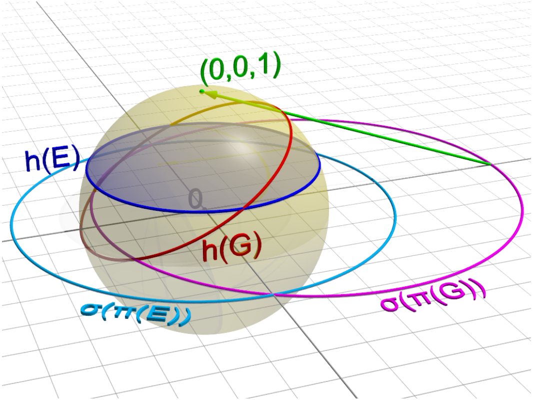
3) Inverse stereografische Projektion π^{-1}

- Kreis mit Radius s wird zu Breitenkreis zur Breite z; $h(E)$
- $h(G) = \pi^{-1}(\sigma(\pi(G)))$ schneidet Breitenkreis z in gegenüberliegenden Punkten
- $h(G)$ ist Kleinkreis durch ζ



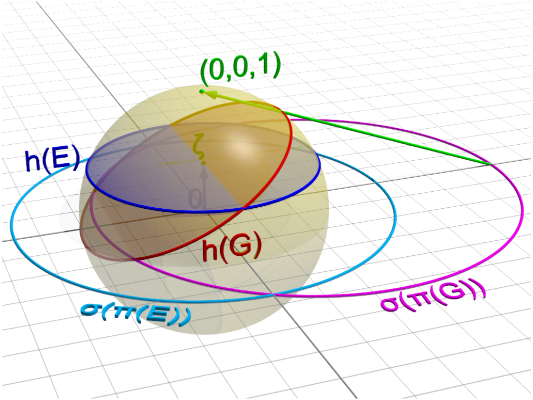
3) Inverse stereografische Projektion π^{-1}

- Kreis mit Radius s wird zu Breitenkreis zur Breite z; $h(E)$
- $h(G) = \pi^{-1}(\sigma(\pi(G)))$ schneidet Breitenkreis z in gegenüberliegenden Punkten
- $h(G)$ ist Kleinkreis durch ζ



3) Inverse stereografische Projektion π^{-1}

- Kreis mit Radius s wird zu Breitenkreis zur Breite z; $h(E)$
- $h(G) = \pi^{-1}(\sigma(\pi(G)))$ schneidet Breitenkreis z in gegenüberliegenden Punkten
- $h(G)$ ist Kleinkreis durch ζ



Theorem

Sei $z \in [0,1)$*. Es gilt die Zerlegung von* $\mathcal{U}$ *in die Operatoren* $\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mathcal{N} \colon L^2(\mathbb{S}^2) \to L^2(\mathbb{S}^2)$

$$\mathcal{U} = \mathcal{N}\mathcal{F}\mathcal{M}.$$

Dabei ist für $f \in C(\mathbb{S}^2)$

- $\mathcal{M}f(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z\xi_3}\,[f \circ h](\boldsymbol{\xi})$
- $\mathcal{F}$ ... Funk–Radon–Transformation
- $\mathcal{N}f(\boldsymbol{\xi}) = f\left(\frac{1}{\sqrt{1-z^2\xi_3^2}}\left(\xi_1, \xi_2, \sqrt{1-z^2}\xi_3\right)\right)$

Nullraum von $\mathcal{U}$

Satz

$\mathbf{R}$ ... Punktspiegelung der Sphäre um den Punkt ζ

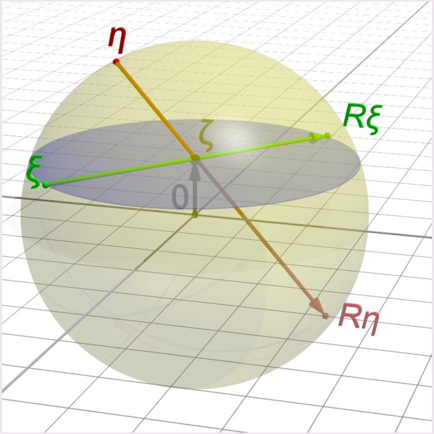
$f \in L^2(\mathbb{S}^2)$

Es gilt

$$\mathcal{U} f = 0$$

genau dann, wenn für fast alle $\eta \in \mathbb{S}^2$

$$f(\eta) = -f(\mathbf{R}\eta) \frac{1 - z^2}{1 + z^2 - 2z\eta_3}.$$



Nullraum von $\mathcal{U}$

Satz

$\mathbf{R}$ ... Punktspiegelung der Sphäre um den Punkt ζ

$f \in L^2(\mathbb{S}^2)$

Es gilt

$$\mathcal{U}f = 0$$

genau dann, wenn für fast alle $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^2$

$$f(\boldsymbol{\eta}) = -f(\mathbf{R}\boldsymbol{\eta})\frac{1 - z^2}{1 + z^2 - 2z\eta_3}.$$

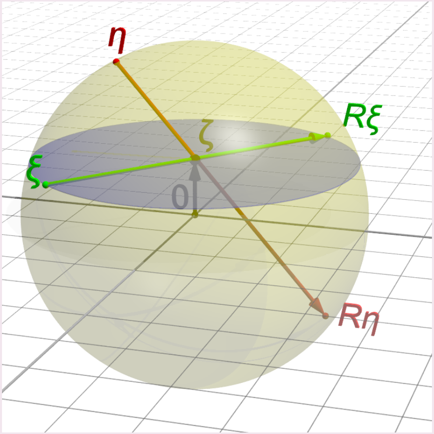


Bild von $\mathcal{U}$

Satz

Die verallgemeinerte Radon-Transformation

$$\mathcal{U}\colon \tilde{L}^2_{\mathrm{e}}(\mathbb{S}^2) \to H^{1/2}_{\mathrm{e}}(\mathbb{S}^2)$$

ist stetig und bijektiv.

- $\tilde{L}^2_{\mathrm{e}}(\mathbb{S}^2) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{S}^2) \mid f(\boldsymbol{\eta}) = f(\mathbf{R}\boldsymbol{\eta}) \dfrac{1-z^2}{1+z^2-2z\eta_3} \right\}$
- $H^{1/2}_{\mathrm{e}}(\mathbb{S}^2)$ ... Sobolevraum der Glattheit $1/2$, der nur gerade Funktionen enthält

Beweisidee

Zeigen

$$\mathcal{U} = \mathcal{N}\mathcal{F}\mathcal{M} \colon \tilde{L}^2(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2)$$

ist stetig und bijektiv.

- $\mathcal{M} \colon \tilde{L}_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2) \to L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2)$ ist unitär
- $\mathcal{F} \colon L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2)$ ist stetig und bijektiv
- $\mathcal{N}, \mathcal{N}^{-1} \colon L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2) \to L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2)$ sind steig und $\mathcal{N}, \mathcal{N}^{-1} \colon H_{\mathrm{e}}^1(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^1(\mathbb{S}^2)$ sind stetig
- $\mathcal{N} \colon H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2)$ ist stetig und bijektiv (als Interpolationsoperator)

Beweisidee

Zeigen

$$\mathcal{U} = \mathcal{N}\mathcal{F}\mathcal{M} \colon \tilde{L}^2(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2)$$

ist stetig und bijektiv.

- $\mathcal{M} \colon \tilde{L}_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2) \to L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2)$ ist unitär
- $\mathcal{F} \colon L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2)$ ist stetig und bijektiv
- $\mathcal{N}, \mathcal{N}^{-1} \colon L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2) \to L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2)$ sind steig und $\mathcal{N}, \mathcal{N}^{-1} \colon H_{\mathrm{e}}^1(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^1(\mathbb{S}^2)$ sind stetig
- $\mathcal{N} \colon H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2)$ ist stetig und bijektiv (als Interpolationsoperator)

Beweisidee

Zeigen

$$\mathcal{U} = \mathcal{N}\mathcal{F}\mathcal{M}\colon \tilde{L}^2(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2)$$

ist stetig und bijektiv.

- $\mathcal{M}\colon \tilde{L}_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2) \to L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2)$ ist unitär
- $\mathcal{F}\colon L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2)$ ist stetig und bijektiv
- $\mathcal{N}, \mathcal{N}^{-1}\colon L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2) \to L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2)$ sind steig und
  $\mathcal{N}, \mathcal{N}^{-1}\colon H_{\mathrm{e}}^1(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^1(\mathbb{S}^2)$ sind stetig
- $\mathcal{N}\colon H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2)$ ist stetig und bijektiv (als Interpolationsoperator)

Beweisidee

Zeigen

$$\mathcal{U} = \mathcal{N}\mathcal{F}\mathcal{M}\colon \tilde{L}^2(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2)$$

ist stetig und bijektiv.

- $\mathcal{M}\colon \tilde{L}_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2) \to L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2)$ ist unitär
- $\mathcal{F}\colon L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2)$ ist stetig und bijektiv
- $\mathcal{N}, \mathcal{N}^{-1}\colon L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2) \to L_{\mathrm{e}}^2(\mathbb{S}^2)$ sind steig und
  $\mathcal{N}, \mathcal{N}^{-1}\colon H_{\mathrm{e}}^1(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^1(\mathbb{S}^2)$ sind stetig
- $\mathcal{N}\colon H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2) \to H_{\mathrm{e}}^{1/2}(\mathbb{S}^2)$ ist stetig und bijektiv (als Interpolationsoperator)

Inversionsformel

Satz

Seien $z \in [0,1)$ und $f \in \tilde{L}^2_{\mathrm{e}}(\mathbb{S}^2)$. Für $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^2$ gilt

$$f(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1-z^2}{2\pi(1-zv)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \int_0^u \int_{\mathscr{S}_z(\boldsymbol{\eta},w)} \mathcal{U}f\left(\frac{\left(\sqrt{1-z^2+\xi_3^2}(\xi_1,\xi_2),\xi_3\right)}{\sqrt{1-z^2+z^2\xi_3^2}} \right) \mathrm{d}s(\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{u^2-w^2}} \bigg|_{u=1}.$$

Dabei ist $\mathrm{d}s$ die Bogenlänge auf dem Kreis

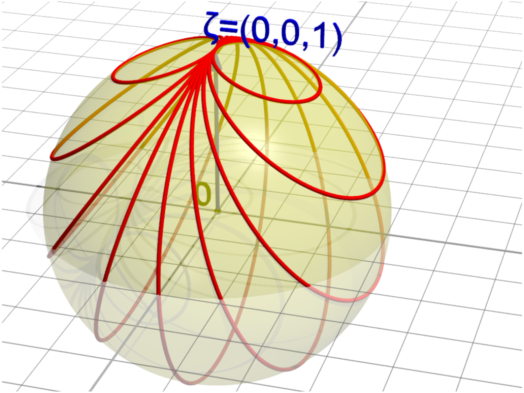
$$\mathscr{S}_z(\boldsymbol{\eta},w) = \left\{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^2 \mid \left\langle \boldsymbol{\xi}, \left(\sqrt{1+\eta_3^2-2z\eta_3}(\eta_1,\eta_2), z-\eta_3\right) \right\rangle = \frac{\sqrt{1-w^2}}{z\eta_3-1} \right\}.$$

Der Fall $z = 1$

[Abouelaz & Daher, 1993]

Spherical Slice Transform

$$\mathcal{U}f(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \xi_3} f(\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}s(\boldsymbol{\eta})$$



- „Kreise gehen durch den Nordpol"
- Ist injektiv für alle beschränkten Funktionen

[Rubin, 2015]

Ausgewählte Literatur

P. Funk.
Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.
Math. Ann., 74(2):278 – 300, 1913.

Y. Salman.
An inversion formula for the spherical transform in S^2 for a special family of circles of integration.
Anal. Math. Phys., Advance online publication, 2015.

M. Quellmalz.
A generalization of the Funk–Radon transform to circles passing through a fixed point.
Preprint, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz 2015.

\endinput