Prof. Andreas Goerdt
Frank Schädlich

TU Chemnitz
Sommersemester 2003

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Algorithmen
2. Übung

1. **Aufgabe**

   Es seien die n Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Für die euklidische Norm aller Vektoren gilt $|v_i| = 1$. Zeigen Sie, daß sich immer n Zahlen $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n = \pm 1$ finden lassen, so daß

   $$|\epsilon_1 v_1 + \epsilon_2 v_2 + \ldots + \epsilon_n v_n| \leq \sqrt{n}$$

   gilt. Können ebenfalls ϵ_i immer so gefunden werden, daß

   $$|\epsilon_1 v_1 + \epsilon_2 v_2 + \ldots + \epsilon_n v_n| \geq \sqrt{n}$$

   gilt? Betrachten Sie hierzu den Wahrscheinlichkeitsraum, in dem jedes ϵ_i unabhängig von allen anderen mit der Wahrscheinlichkeit $p = 1/2$ auf 1 bzw. mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p = 1/2$ auf -1 gesetzt wird.

2. **Aufgabe**

   Zeigen Sie, daß

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^{\binom{k}{2}}} \;=\; n^{\Omega(\log_2 n)}$$

   gilt.

3. **Aufgabe**

   Es sei $c > 0$ eine Konstante. Betrachten Sie zufällige Graphen G mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p = c/n$. Zeigen Sie unter Verwendung der Tschebyscheff-Ungleichung, daß ein solcher Graph mit hoher Wahrscheinlichkeit mindestens $cn/4$ viele Kanten und maximal $3cn/4$ viele Kanten enthält.

4. **Aufgabe**

   Betrachten Sie zufällige Graphen G mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p = 12/n$. Zeigen Sie, daß diese Graphen mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht 3-färbbar sind. Wenden Sie hierzu die Markoff-Ungleichung an.