Prof. Andreas Goerdt
Frank Schädlich

TU Chemnitz
Sommersemester 2003

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Algorithmen
4. Übung

1. **Aufgabe**

   Es sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable und $\delta > 0$. Zeigen Sie, daß aus der Chernoff-Schranke

   $$\text{Prob}\left[X \leq (1-\delta)\cdot \text{E}X\right] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\text{E}X}$$

   und $0 < \delta < 1$ die Ungleichung

   $$\text{Prob}\left[X \leq (1-\delta)\cdot \text{E}X\right] \leq e^{-\delta^2\cdot \text{E}X/2}$$

   folgt.

2. **Aufgabe**

   Es sei X eine mit den Parametern p und n binomialverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, daß X mit hoher Wahrscheinlichkeit im Wesentlichen um nicht mehr als das $1/\sqrt{pn}$-Fache vom Erwartungswert abweicht, dabei gelte $pn \to \infty$.

3. **Aufgabe**

   Betrachten Sie zufällige aussagenlogische Formeln in 3-KNF. Eine Formel enthält n Variablen, in einer Klausel kommen Variablen bzw. Literale nicht doppelt vor. Die Klauseln werden unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit $p = \sqrt{n}/n^2$ gewählt.

   (a) Was können Sie über die Anzahl Klauseln in einer solchen Formel aussagen?

   (b) Zeigen Sie, daß mit hoher Wahrscheinlichkeit *jede* Belegung a der Variablen mit 0 oder 1 im Wesentlichen einen Anteil von 7/8 vielen Klauseln erfüllt.

4. **Aufgabe**

   Es seien X und Y binomialverteilte Zufallsvariablen.

   (a) Es seien $X = \text{Bin}(l,p)$ und $Y = \text{Bin}(n,p)$. Zeigen Sie

   $$\text{Prob}[X > a] \leq \text{Prob}[Y > a]$$

   für $n \geq l$.

   (b) Es seien $X = \text{Bin}(l,p)$ und $Y = \text{Bin}(l,p')$. Zeigen Sie

   $$\text{Prob}[X > a] \leq \text{Prob}[Y > a]$$

   für $p' \geq p$.