S. Schüler

TU Chemnitz
Sommersemester 2006
19. Juni 2006

Theorie der Programmiersprachen

Lösungen zur 4. Übung

1. Aufgabe:

   In der *Prädikatenlogik mit Identität* ist auch das Symbol = zugelassen, das Gleichheit zwischen Termen bedeuten soll. Wie muss die *Syntax* (Definition der Formeln) und *Semantik* ()Definition von $\mathcal{A}(F)$ der Prädikatenlogik erweitert werden, um die Prädikatenlogik mit Identität zu erhalten?

   Syntax Sind t_1 und t_2 zwei Terme, so ist $t_1 = t_2$ eine Funktion!

   Semantik Sei F eine Funktion der Art $t_1 = t_2$, dann ist:

   $$\mathcal{A} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_2) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Aufgabe:

   Man gebe eine erfüllbare prädikatenlogische Aussage F mit Identität an, so dass für jedes Modell $\mathcal{A}$ von F gilt $|U_{\mathcal{A}}| \leq 2$.

   In Anlehnung an das Färbbarkeitsproblem kann die Lösung nach folgender Idee konstruiert werden:

   Stehen zum Färben dreier, aneinander stoßender Flächen weniger als drei Farben zur Verfügung, so haben nach dem Färben mindestens zwei Flächen die gleiche Farbe. Hat man jedoch mehr Farben zur Verfügung, kann eine Färbung angegeben werden, bei der alle drei Flächen unterschiedliche Farben haben.

   Die gesuchte Formel entspricht also der Aussage:

   Für zwei oder weniger Farben gilt, dass für alle möglichen Farbkombinationen dreier angrenzender Flächen stets zwei benachbarte Flächen die gleiche Färbung haben, für mehr als drei Farben existiert jedoch eine Farbkombination für die das nicht gilt.

   $$F = \forall x \forall y \forall z \left((x = y) \vee (y = z) \vee (z = x) \right)$$

3. Aufgabe:

   Man zeige, dass folgendes Korrespondenzproblem eine Lösung besitzt:

   $$\begin{array}{llll} x_1 = 001 & x_2 = 01 & x_3 = 01 & x_4 = 10 \\ y_1 = 0 & y_2 = 011 & y_3 = 101 & y_4 = 001 \end{array}$$

Löst man das gegebene Korrespondenzproblem so erhält man:

die Indexfolge:

$i = (2, 4, 3, 4, 4, 2, 1, 2, 4, 3, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 3, 4, 4, 4, 2,$
$1, 2, 1, 1, 1, 3, 4, 3, 4, 1, 2, 1, 4, 4, 2, 1, 4, 1, 1, 3, 4, 1, 1, 3, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 1, 3)$

und das korrespondierende Wort:

0110011010010010110011001101001101001001101001001011000100101101010010010100100100101100110001010011010010011000100101100010010100
1001010010100110001001 01

4. Aufgabe:

Man zeige, dass das *Postsche Korrespondenz-Problem* (PKP) über dem einelementigen Alphabet entscheidbar ist.

Basierend auf dem einelementigen Alphabet (mit dem speziellen Element a) existieren nur Wortpaare der Art

$$\begin{pmatrix} \overbrace{a \dots a}^{n} \\ \underbrace{a \dots a}_{m} \end{pmatrix} \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}. \text{ (Beispielsweise } \binom{a}{aa}, \binom{aaa}{aa}, \binom{a}{a} \text{ auch } \binom{\epsilon}{aa}\text{).}$$

Außerdem ist die Reihenfolge der Anordnung der Wortpaare nicht von Bedeutung, da sich dadurch die resultierende Wortkette nicht verändert.

Wortpaare können damit auf die Differenz $n - m$ reduziert werden.

Betrachtet man nun alle gegebenen Wortpaare der Menge der Wortpaare K, dann gilt:

- $\forall u \in K(n_u - m_u) > 0$ bzw. $\forall u \in K(n_u - m_u) < 0$
  In diesem Fall hat das PKP keine Lösung, denn stets wächst eine der beiden Wortpaarketten schneller als die andere, und damit kann keine korrespondierende Folge entstehen.
- $\neg\forall u \in K(n_u - m_u) > 0$ bzw. $\neg\forall u \in K(n_u - m_u) < 0$
  Dann gilt entweder:
  a) $\exists u \in K(n_u - m_u) = 0$,
     dann ist dieses Wortpaar bereits eine Lösung.
  b) $(\exists u \in K(n_u - m_u) > 0) \wedge (\exists v \in K(n_v - m_v) < 0)$,
     nach dem Verfahren des *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* werden die beiden Wortpaare u und v zusammengesetzt. $(n_v - m_v) \times u$ verknüpft mit $(n_u - m_u) \times v$ ergibt eine korrespondierende Folge.

Obiges Verfahren liefert somit eine korrespondierende Folge als Lösung, wenn das PKP lösbar ist, sonst wird die Unlösbarkeit als Ergebnis zurückgegeben. Das PKP auf dem einelementigen Alphabet ist entscheidbar.