

Effiziente Algorithmen / Theoretische Informatik III

1. Übung

1. Aufgabe: Wir verwenden in Dijkstras Algorithmus einen Heap.

- (a) Welche Operationen muß der Heap zur Verfügung stellen?
- (b) Implementieren Sie diese Operationen in Pseudocode und analysieren Sie die Laufzeit.
- (c) Geben Sie an, wie aus n Elementen in Zeit $O(n)$ ein Heap aufgebaut werden kann.
- (d) Kann die Operation `DeleteMin` so implementiert werden, daß die k -malige Ausführung von `DeleteMin` insgesamt die Zeit $O(k)$ braucht?

2. Aufgabe: Beweisen Sie die folgenden Sätze.

- (a) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n, k \geq 1$ ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

- (b) Für alle $n \geq 0$ ist

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n.$$

- (c) Für alle $k, l, n \in \mathbb{N}$, $k \leq l + n$ gilt

$$\binom{l+n}{k} = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} \cdot \binom{n}{k-i}.$$

Dabei gilt $\binom{a}{b} = 0$ falls $a < b$ ist.

Hinweis: Arbeiten Sie mit der „kombinatorischen Interpretation“ der Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned} \binom{l+n}{k} &= \# \text{ } k\text{-elementige Teilmengen einer } (l+n)\text{-elementigen Menge} \\ &= \# \text{ } k\text{-elementige Teilmengen einer Menge,} \\ &\quad \text{die aus } l \text{ „roten“ und } n \text{ „schwarzen“ Elementen besteht.} \end{aligned}$$