

Effiziente Algorithmen / Theoretische Informatik III

5. Übung

1. Aufgabe: Zeigen Sie, dass für $0 < l < 2n$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{n} \cdot l \cdot k\right) = \frac{1 - (-1)^l}{2}$$

Hinweis: Benutzen Sie $\cos \phi = (e^{i\phi} + e^{-i\phi})/2$ und die Formel für die geometrische Reihe.

2. Aufgabe: Betrachten Sie die folgende Matrix $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ für die diskrete Cosinus-Transformation.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{n}} & \sqrt{\frac{1}{n}} & \dots & \sqrt{\frac{1}{n}} \\ \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 1 \cdot 1\right) & \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 1 \cdot 3\right) & \dots & \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 1 \cdot (2n-1)\right) \\ \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 2 \cdot 1\right) & \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 2 \cdot 3\right) & \dots & \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot 2 \cdot (2n-1)\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot (n-1) \cdot 1\right) & \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot (n-1) \cdot 3\right) & \dots & \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot (n-1) \cdot (2n-1)\right) \end{pmatrix}$$

Für $i = 2, \dots, n$ ist also $c_{ij} = \sqrt{2/n} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} \cdot (i-1) \cdot (2j-1)\right)$.

Zeigen Sie, dass C orthogonal ist, d.h. alle Spalten haben die euklidische Norm 1 und je zwei verschiedene Spalten stehen senkrecht aufeinander.

Hinweis: Benutzen Sie $\cos \phi_1 \cdot \cos \phi_2 = (\cos(\phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2))/2$.

3. Aufgabe: Entwickeln Sie auf Basis der FFT, sowie der Beziehung $\cos \phi = (e^{i\phi} + e^{-i\phi})/2$ einen Algorithmus, der das Produkt $C \cdot a$ in Zeit $O(n \cdot \log n)$ berechnet.

4. Aufgabe: Die Abbildung $C \cdot a$ stellt den Vektor a in einer anderen Basis dar. Skizzieren Sie die Basisvektoren der neuen Basis für den Fall $n = 8$.