Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

TU Chemnitz
Sommersemester 2011
13.07.2011

Effiziente Algorithmen / Theoretische Informatik III

6. Übung

1. Aufgabe: Betrachten Sie das zufällige Experiment des n-maligen Münzwurfes. Bei der Münze tritt „Kopf“ mit Wahrscheinlichkeit p und „Zahl“ mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ auf. Definieren Sie eine Zufallsvariable X, welche die Anzahl der geworfenen „Köpfe“ des Experimentes zählt. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$ einmal mit Hilfe von geeigneten Indikator-Zufallsvariablen.

2. Aufgabe: Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ eine Zufallsvariable. Beweisen Sie die Markov-Ungleichung: Für $a > 0$ ist

$$\Pr[X \geq a] \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{a}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Definition des Erwartungswertes.

3. Aufgabe: Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Beweisen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung

$$\Pr\left[|X - \mathbf{E}[X]| \geq a\right] \leq \frac{\mathbf{V}[X]}{a^2},$$

wobei $\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}^2[X]$ die Varianz von X ist.

4. Aufgabe: Betrachten Sie das zufällige Experiment des n-maligen Münzwurfes mit einer faire Münze. Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der geworfenen „Köpfe“ zählt. Zeigen Sie $\Pr[|X - \mathbf{E}[X]| \geq n^{3/4}] \to 0$. Beachten Sie, daß für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$\mathbf{V}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}[X_i].$$