Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

TU Chemnitz
Sommersemester 2015
02.04.2015

Effiziente Algorithmen / Theoretische Informatik III

1. Übung

1. Aufgabe: Wir verwenden in Dijkstras Algorithmus einen Heap.

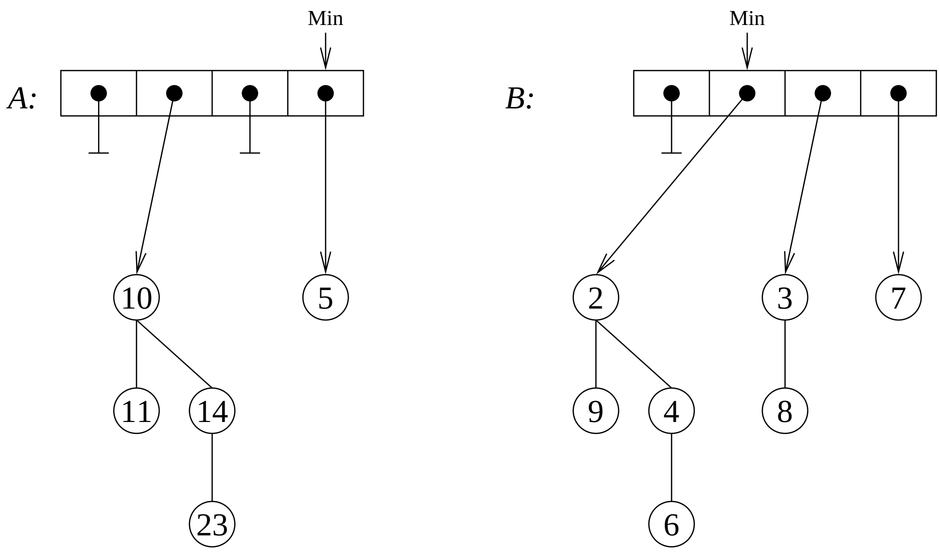
(a) Welche Operationen muß der Heap zur Verfügung stellen?

(b) Implementieren Sie diese Operationen in Pseudocode und analysieren Sie die Laufzeit.

(c) Geben Sie an, wie aus n Elementen in Zeit $O(n)$ ein Heap aufgebaut werden kann.

(d) Kann die Operation `DeleteMin` so implementiert werden, daß die k-malige Ausführung von `DeleteMin` insgesamt die Zeit $O(k)$ braucht?

2. Aufgabe: Wir betrachten die folgenden zwei *binomialen Heaps* A und B. Führen Sie die Operation `meld(A,B)` aus.



3. Aufgabe: Beweisen Sie die folgenden Sätze.

(a) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n, k \geq 1$ ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

(b) Für alle $n \geq 0$ ist

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

(c) Für alle $k, l, n \in \mathbb{N}$, $k \leq l + n$ gilt

$$\binom{l+n}{k} = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \cdot \binom{n}{k-i}.$$

Dabei gilt $\binom{a}{b} = 0$ falls $a < b$ ist.
Hinweis: Arbeiten Sie mit der „kombinatorischen Interpretation“ der Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned} \binom{l+n}{k} &= \#\ k\text{-elementige Teilmengen einer } (l+n)\text{-elementigen Menge} \\ &= \#\ k\text{-elementige Teilmengen einer Menge,} \\ &\quad\ \text{die aus } l \text{ „roten“ und } n \text{ „schwarzen“ Elementen besteht.} \end{aligned}$$