(1)

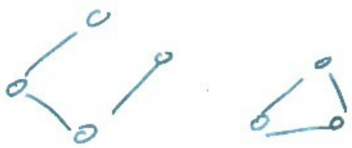
4.4.17

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Algorithmik

Literatur: Wilf: Algorithms and Complexity

1. ~~Unabhängige~~ Unabhängige Menge

$G = (V, E)$ ungerichteter Graph



$U \subseteq V$ ist unabh. Menge

$\Leftrightarrow$

Es gibt keine Kante $\{x, y\} \in E$ und $x, y \in U$

Problem: Suche einer unabhängigen Menge von maximaler Größe, d.h. $|U| = \#U$ maximal

Ist NP-hart. Folgender Beweis dazu:

Betrachte eine 3-SAT Formel

$$(\overset{\downarrow \text{Wert } 1}{\underline{x_1}} \vee \neg x_2 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \overset{\downarrow \text{Wert } 0}{\underline{\neg x_7}} \vee x_8) \wedge \ldots \wedge (\overset{\downarrow \text{Wert } 1}{\underline{x_5}} \vee \neg x_4 \vee x_7)$$

Maximal 3 Literale

Ja / Nein

Ja $\Leftrightarrow$ Es gibt eine erfüllende Belegung.

Nein $\Leftrightarrow$ Es gibt keine erfüllende Belegung.

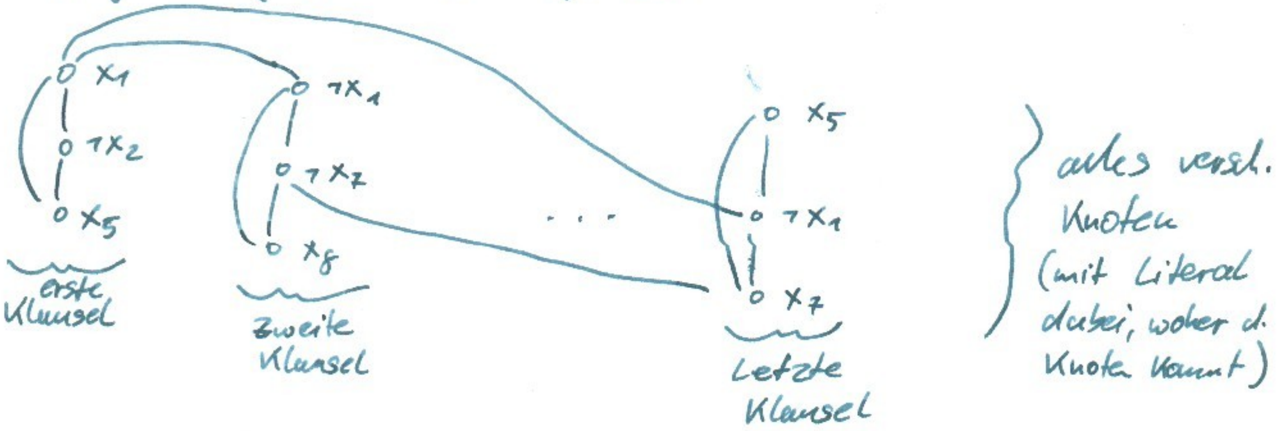
3-KNF-SAT $\leq_p$ Unabh. Menge (max. Größe)

4.4.17

Was heißt eine Formel in 3-SAT hat eine Lösung (erfüllende Belegung)?

Widerspruchsfreier Weg (Auswahl ~~einer~~ eines Literals pro Klausel, das diese K. wahr macht) entspricht Lösung.

Bauen folgenden Graphen: am Bsp. oben



- Kanten innerhalb der Klauseln.
- Kanten zw. allen Literalen, die sich widersprechen, also zw. allen $x - \neg x$.

<u>Es gilt:</u> Formel erfüllbar $\Leftrightarrow$ Konstruierter Graph hat unabhängige Menge mit Größe m.
mit m Klauseln

<u>Beweis:</u> "$\Rightarrow$" Widerspruchsfreier Weg durch die Klauseln ergibt die unabhängige Menge.

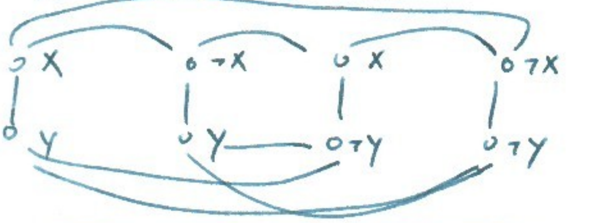
"$\Leftarrow$" Es gibt keine unabh. Menge mit $\gneq$ m Knoten. Haben wir unabh. Menge d. Größe = m, dann ergibt sich direkt der Widerspruchsfreie Weg.

Beispiele: • trivial $X \wedge \neg X$

$\Downarrow$

• mit 2 Var.

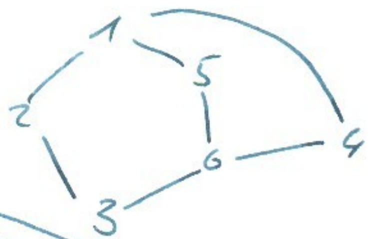
$(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)$

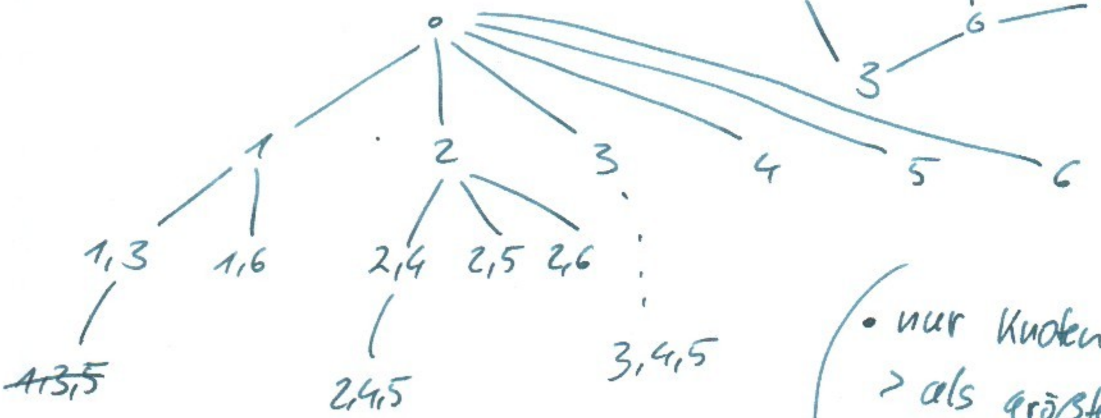


Finden einer unabhängigen Menge maximaler Größe

Algorithmus: Backtracking

$G =$

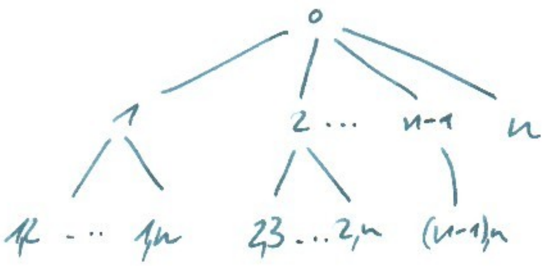




$\in U$

• nur Knoten mit Nummer > als größter bisheriger brauchen beim Hinzufügen betrachtet werden.

Worst case: $E = \emptyset$



Knoten $= 2^n$

Best case: $E =$ alles

n+1 Knoten

4.4.17

Frage: Wie sieht die Laufzeit im Mittel aus?

Knotenzahl ist n, betrachte <u>alle</u> Graphen mit ~~#~~ Knoten $1, 2, \ldots, n$. Jeder Graph gleichwahrscheinlich!

$\binom{n}{2}$ = # prinzipiell möglicher Kanten

$$\Rightarrow \underbrace{2^{\binom{n}{2}}}_{\#\text{Graphen}} = 2^{\left(\frac{1}{2} \cdot n(n-1)\right)} = \sqrt{2}^{\,n(n-1)} \gg 2^n.$$

Wahrscheinlichkeitsraum: Ω = Alle $2^{\binom{n}{2}}$ Graphen

$\text{Prob}(g) = \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}}$ uniforme Verteilung.

<u>Wie können wir Graphen nach dieser Verteilung generieren?</u>

Haben Zufallsbits $\text{Prob}[\text{Bit}=0] = \text{Prob}[\text{Bit}=1] = \frac{1}{2}$

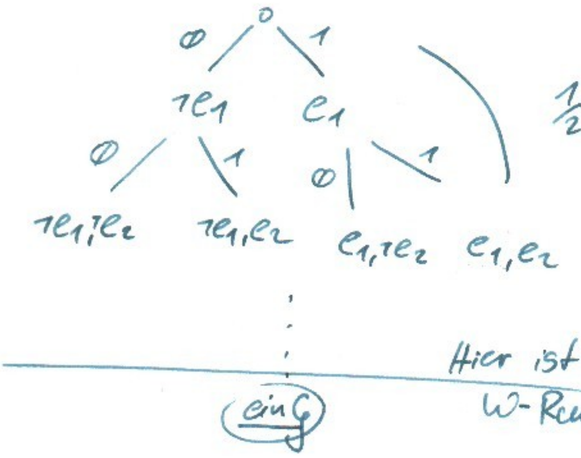
Ordnen die Kanten an: $e_1, e_2, \ldots, e_{\binom{n}{2}} \mathrel{\hat{=}} \{1,2\}, \{1,3\}, \ldots, \{2,3\}, \ldots, \{n-1, n\}$

1. Zufallsbit ziehen $0 \mapsto e_1$ nicht dabei, $1 \to e_1$ dabei
2. Neues (unabh.) Zufallsbit ziehen $0 \to e_2$ nicht dabei, $1 \to e_2$ dabei

⋮ usw. $\binom{n}{2}$ Schritte.

4.4.17

Veranschaulichung in einem Wahrscheinlichkeitsbaum.



$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Hier ist unser W-Raum!

Wkt.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}}$

(W-Keit einer Menge = Summe der Einzelw-keiten.)

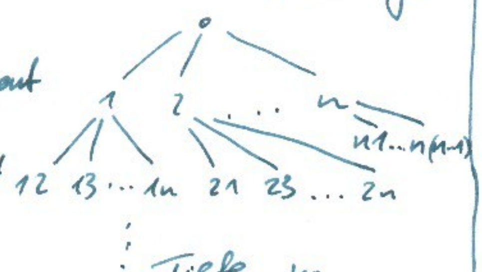
M = Menge der Graphen mit genau m Kanten.

$$\mathrm{Prob}[M] = \mathrm{Prob}[\underbrace{G;\ G \text{ hat genau } m \text{ Kanten}}_{\text{Schreibweise für } M}]$$

ziehen der Teilmenge

1. Element

2. Element $\neq$ 1. El.



Tiefe m

$\Rightarrow$ ergibt alle Folgen, aus versch. Elementen, der Länge m

$\Rightarrow (n)_m$ Blätter

$\Rightarrow$ jede Menge wird $m!$ mal erfaßt

$\Rightarrow \frac{(n)_m}{m!}$ Mengen

Erklärung: n Elemente

1elementige Teilmengen n Stück

2elementige: $\binom{n}{2}$

3-elementige: $\binom{n}{3}$

⋮

m elementige: $\binom{n}{m}$

$n \geq 1,\ m \geq 0$

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

$0! = 1$

$$= \frac{n \cdot (n-1)(n-2) \ldots \cancel{(n-m)} \ldots 1}{m!\ \cancel{(n-m)} \cdot \ldots \cdot 1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!}$$

erste m Fakt. d. Fak.

$$= \frac{(n)_m}{m!}$$

⑥

4.4.17

$\text{Prob}[M] = \text{Prob}[\mathcal{G};\ \mathcal{G} \text{ hat genau } m \text{ Kanten}]$

$= \underbrace{\binom{\binom{n}{2}}{m} \cdot \left(1/2\right)^{\binom{n}{2}}}$,

Graphen mit genau m Kanten $= \binom{\binom{n}{2}}{m}$

$$= \frac{\frac{n(n-1)}{2} \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2} - m + 1\right)}{m!}$$

$m = 0, \ldots, \binom{n}{2}$

$$\sum_m \text{Prob}[\mathcal{G};\ \mathcal{G} \text{ hat } m \text{ Kanten}] = 1$$

da $\Omega = \{\mathcal{G};\ \mathcal{G} \text{ hat } 0 \text{ Kanten}\} \,\dot\cup\, \{\mathcal{G};\ \mathcal{G} \text{ hat } 1 \text{ Kante}\} \,\dot\cup \ldots \dot\cup$

$\{\mathcal{G};\ \mathcal{G} \text{ hat } \binom{n}{2} \text{ Kanten}\}$

Algebraisch $\underbrace{\sum_{m=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{m}}_{2^{\binom{n}{2}}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}} = 1$

Noch etwas anders:

$$1 = \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{\binom{n}{2} \text{ Faktoren}}$$

$\binom{\binom{n}{2}}{m}$ Wege mit genau m-mal das erste $\frac{1}{2}$ gewählt

$$= \sum \binom{\binom{n}{2}}{m} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2} - m}}_{= \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}}}$$

Binomialverteilung (Beweis geht auch mit p und $q = 1-p$ als ~~W~~ Wkt.)

11.4.17

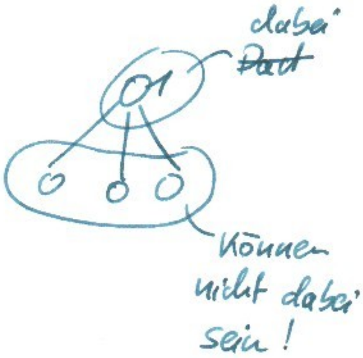
Wdh. Backtracking f. größte unabhängige Menge

Rekursion mit geänderten Graph

gibt größte unabh. Menge mit Knoten K

= K ∪ größte unabh. Menge im Restgraph (wie oben aufgebaut)

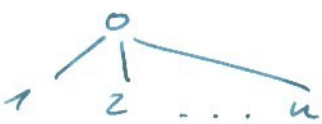
Knoten 1 gestrichen im neu konstruierten Graphen und auch die Nachbarn von 1.



Anm.:

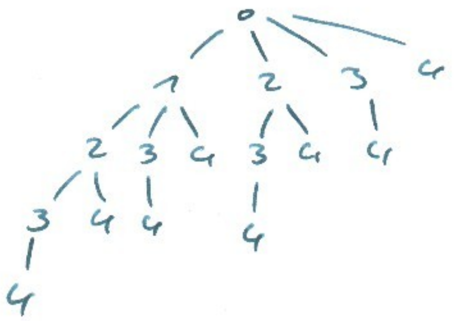
* Algorithmus mit $O(p(n) \cdot 2^n)$ durch Aufzählen der Bitvektoren (Teilmengen) leicht zu bekommen.

* Beispiel zum Backtracking Algo.
  - Alle Kanten dabei:



$O(n)$

  - Keine Kanten: $n=4$



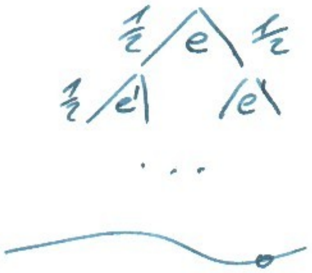
- Zufälliger Graph mit n Kanten

W-Raum: Alle $2^{\binom{n}{2}}$ Graphen.

Jeder Graph mit gleicher W-Keit.

$$\mathrm{Prob}(G) = \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}}$$

– Entscheidungsbaum, jede Kante mit Wkt. $\frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ an Blättern sind die ~~Graph~~ Graphen.



Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten.

Was ist die #Kanten in so einem Graph?

$$\underset{\text{Zufallsvariable}}{X}: \underbrace{\{G \mid G \text{ mit } n \text{ Kanten}\}}_{\text{unser Raum}} \to \mathbb{N}$$

$$X(G) := \#\text{Kanten in } G$$

$$0 \leq X(G) \leq \binom{n}{2}.$$

Mittelwert von X (Erwartungswert)

$$E[X] = \sum_{G} X(G) \cdot \mathrm{Prob}[G]$$

$$= \sum_{m=0}^{\binom{n}{2}} m \cdot \underbrace{\mathrm{Prob}[X=m]}_{= \mathrm{Prob}\{G;\ X(G)=m\}}$$

$E[X] = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2}$ (jeder Graph gleich wahrscheinlich)

Beweis: $E[X] = \sum_{m=0}^{\binom{n}{2}} m \cdot \underbrace{\mathrm{Prob}[X=m]}_{= \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}} \cdot \binom{\binom{n}{2}}{m}} = \sum_{m=0}^{\binom{n}{2}} m \cdot \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}} \cdot \underbrace{\binom{\binom{n}{2}}{m}}_{= \frac{\left(\binom{n}{2}\right)_m}{m!}}$

(bei 1 anf. da Summand bei $m=0$ 0 ist)

$$= \binom{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right) \underbrace{\sum_{m=1}^{\binom{n}{2}} \frac{\left(\binom{n}{2} - 1\right)_{m-1}}{(m-1)!} \cdot \frac{1}{2^{\binom{n}{2}-1}}}_{=1}$$

$$= \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sum_{m=1}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}-1}{\underbrace{m-1}_{\text{von } 0 \text{ bis } \binom{n}{2}-1}} \cdot \frac{1}{2^{\binom{n}{2}-1}}$$

$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{\binom{n}{2}-1} \binom{\binom{n}{2}-1}{m}}_{= 2^{\binom{n}{2}-1}} \cdot \frac{1}{2^{\binom{n}{2}-1}}$$

Einfacher: $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{\binom{n}{2}}$

$X : \{ g ; g \text{ Graph mit } n \text{ Knoten} \} \to \mathbb{N}$

$X_i : \{ \quad \text{———} \quad " \quad \text{———} \quad \} \to \mathbb{N}$

$X(g) = X_1(g) + \ldots + X_{\binom{n}{2}}(g)$

$X_i(g) = \begin{cases} 1 & \text{Kante } i \text{ dabei} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Indikator für Kante i.

$\Downarrow$

$$E[X] = E[X_1 + \dots + X_{\binom{n}{2}}]$$

$$= E[X_1] + \dots + E[X_{\binom{n}{2}}]$$ Linearität d. Erwartungswerts

$$E[X_i] = 1 \cdot \text{Prob}[G \,;\, G \text{ hat Kante } i] = \frac{1}{2}$$

(alle gleich!)

$\Downarrow$

gibt dann insgesamt $E[X] = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Was sagt der Erwartungswert über den zufällig ankommenden Graph?

* Ohne weiteres nicht viel: Betrachte dazu die folgende Verteilung!

G_1 – Graph mit allen Kanten mit Wkt. $\frac{1}{2}$

G_2 – Graph ohne Kanten mit Wkt. $\frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Auch hier ist } E[X] = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2}}$

extreme Abhängigkeit (d. Kante)

$X(G_1) = \binom{n}{2}$ $\quad X(G_2) = \emptyset$

* In unserem unabhängigen Fall, was könnte dort gelten?

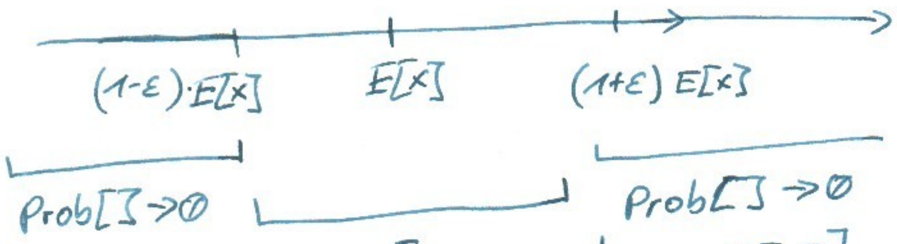
$X \approx \frac{1}{2}\binom{n}{2}$ fast immer

Sei $\varepsilon > \emptyset$ fest. Dann gilt:

- $\text{Prob}[X \geq (1+\varepsilon) \cdot E[X]] \to \emptyset$
- $\text{Prob}[X \leq (1-\varepsilon) \cdot E[X]] \to \emptyset$

für $n \to \infty$

~~$\Rightarrow \text{Prob}\{G_1$~~



$$\text{Prob}\left[\,|X - E[X]| \leq \varepsilon\, E[X]\,\right] \to 1$$

$|X(g) - E[X]| \leq \varepsilon\, E[X]$

$\Leftrightarrow$

$X(g) - E[X] > 0 \Rightarrow X(g) \leq E[X](1+\varepsilon)$

$X(g) - E[X] < 0 \Rightarrow E[X](1-\varepsilon) \leq X(g)$

<u>Ziel:</u> $\text{Prob}\left[\,|X - E[X]| \geq \varepsilon\, E[X]\,\right] \to 0$

$$= \{\, g \,;\; |X(g) - E[X]| \geq \varepsilon \cdot E[X] \,\}$$

$$|X(g) - E[X]| \geq \varepsilon \cdot E[X] \Leftrightarrow \underbrace{\left(X(g) - E[X]\right)^2}_{} \geq \left(\varepsilon \cdot E[X]\right)^2$$

$\left(\text{da } |a|^2 = a^2\right)$

neue Zufalls-variable, hat nur Werte ≥ 0

<u>Markov-Ungleichung:</u>

Ist $Y \geq 0$ eine Zufallsvariable, $(Y : \Omega \to \mathbb{N}^{\geq 0}$, Ω endl. Raum$)$

dann gilt für $a \gneq 0$

$$\text{Prob}[Y \geq a] \leq \frac{E[Y]}{a}$$

11.4.17

Beweis: $E[Y] = 1 \cdot \text{Prob}[Y=1] + 2 \cdot \text{Prob}[Y=2] + \ldots + \overset{m_1}{a} \cdot P(Y=a)$

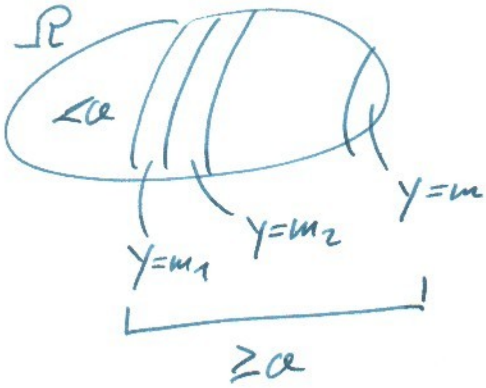
$+ \underbrace{m}_{\text{maximaler Wert von } Y(\omega),\ \omega \in \Omega} \cdot \text{Prob}[Y=m]$

(Summ. kleiner a weg, größer a durch a ers.)

$\geq a \cdot \big(\text{Prob}(Y=m_1) + \text{Prob}(Y=m_2) + \ldots + \text{Prob}(Y=m)\big)$

wobei $m_1, m_2, \ldots, m$ die Werte $\geq a$ sind, die von Y angenommen werden.

$= a \cdot \text{Prob}(Y \geq a)$



Also: $P[Y \geq a] \leq \dfrac{E[Y]}{a}$

---

ein Bsp. dazu:
- Alle Kanten mit $\frac{1}{2}$: G_1
- Keine Kanten mit $\frac{1}{2}$: G_2

$E[X] = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$

$\text{Prob}[X \geq 1] \leq E[X]$

f. $n=2$: $\frac{1}{2} \cdot 1$ ✓

11.4.17

$n=3$ $\quad E[X] = \frac{1}{2} \cdot \binom{3}{2} = \frac{3}{2}$.

$$\text{Prob}[X \geq 1] \leq E[X] = \frac{3}{2}$$

$$\underbrace{\text{Prob}[X \geq 2]}_{= \frac{1}{2}.} \leq \frac{E[X]}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Prob}[X \geq 3] \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

12.4.17

Wdh. Markov-Ungleichung

Für alle $a \gneq 0$, $Y \geq 0$ gilt

$$\text{Prob}[Y \geq a] \leq \frac{E[Y]}{a}.$$

Bew: $E[Y] = \cancel{\text{Prob}} \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot \text{Prob}(Y=\omega)$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ Y(\omega) < a}} Y(\omega) \cdot \text{Prob}(Y=\omega)}_{\geq 0, \text{ da } Y \geq 0} + \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ Y(\omega) \geq a}} \overbrace{Y(\omega)}^{\geq a} \cdot \text{Prob}(Y=\omega)$$

$$\geq 0 + \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ Y(\omega) \geq a}} a \cdot \text{Prob}(Y=\omega) = a \cdot \text{Prob}(Y \geq a)$$

also: $E[Y] \geq a \cdot \text{Prob}(Y \geq a)$

$$\Leftrightarrow \text{Prob}(Y \geq a) \leq \frac{E[Y]}{a}$$

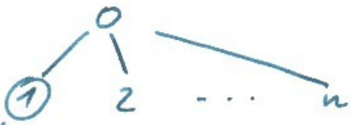
$\blacksquare$

12.4.17

Übung: Rekursiver Algorithmus für größte unabhängige Menge.

$V = \{1, 2, \dots, n\}$

$\mathcal{G} = (V, E)$



Knoten 1 dabei, dann kann kein Nachbar dabei sein.

Max. unabh. Menge ist dann die max. unabh. Menge im Rest und der Knoten 1 dazu.

$\to$ Rekursion

Ende bei $E = \emptyset$

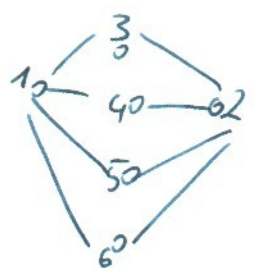
$(V = \emptyset \Rightarrow E = \emptyset)$

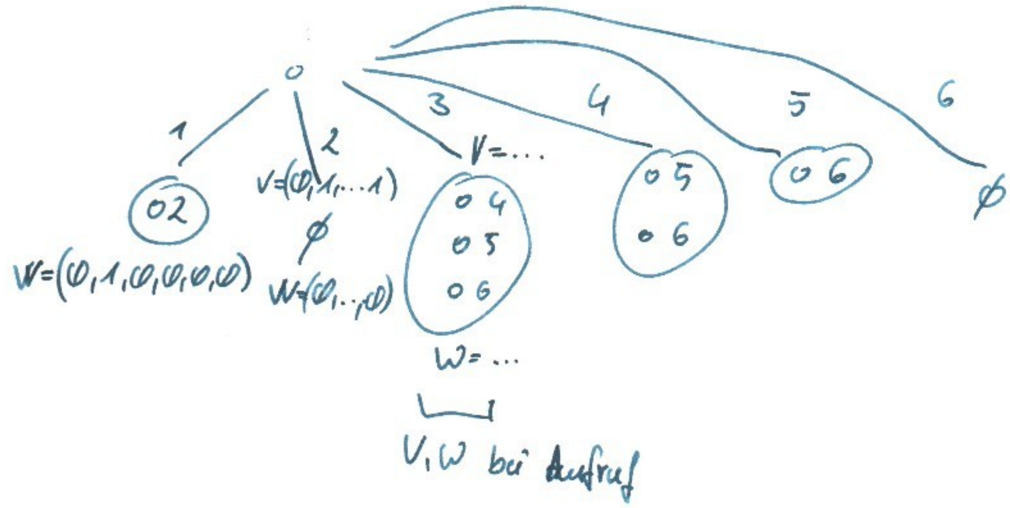
Unabh. Menge ($\mathcal{G}$) (eig. nur Menge V der noch aktiven Knoten.)

($V=\emptyset$ ist mögl.)

```
if E = ∅ then return V;
M := ∅;
for v∈V do
    G_v := G ohne V und ohne Nachbarn von v in W gemerkt
                                                ↖ neu
    U := Unabh. Menge(G_v) ∪̇ {v};     übergeben in W
    if |U| > |M| then M := U;
    V[v] = ∅; // v löschen.
end;
return M;
```

Bsp.: $\mathcal{G} =$





Korrektheit: Max unabh. Menge von $\mathcal{G}$

= Maximum von folgenden

Max. unabh. Menge von $\mathcal{G}_v \cup \{v\}$ für alle v, die zu $\mathcal{G}$ gehören.

[$\mathcal{G} \setminus M$ = $\mathcal{G}$ ohne die Knoten in M]

bzw.

Ist $\mathcal{G} = (V, E)$ $V = \{1, \dots, n\}$ dann Max von

(Max. unabh. Menge von $\mathcal{G}_1) \cup \{1\}$,

(Max. unabh. Menge von $(\mathcal{G} \setminus \{1\})_2) \cup \{2\}$

$\vdots$

(Max. unabh. Menge von $\mathcal{G} \setminus \{1, \dots, n-1\})_n) \cup \{n\}$

12.04.17.

\# Anwendung der Markov Ungleichung auf den Raum der Graphen.

$$\text{Prob}[g] = \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}} \qquad X = \#\,\text{Kanten}$$

$$\text{Prob}\left[X \geq \binom{n}{2}\frac{9}{10}\right] \leq \frac{E[X]}{\frac{9}{10}\binom{n}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\binom{n}{2}\cdot 10}{9\cdot\binom{n}{2}} = \frac{5}{9} \ll 1.$$

$$\text{Prob}\left[X \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2}(1+\varepsilon)\right] \leq \frac{1}{1+\varepsilon} \neq 1 \quad, \varepsilon > 0$$

(Ziel: $\to 0$)

$$|X(g) - E[X]| \geq \varepsilon\, E[X]$$

$\Leftrightarrow$ $X(g) \geq (1+\varepsilon)\cdot E[X]$

oder

$X(g) \leq (1-\varepsilon)\cdot E[X]$

$$\text{Prob}[\underbrace{|X - E[X]|}_{\text{neue ZV}} \geq \varepsilon\cdot E[X]]$$

$Y(g) := |X(g) - E[X]|$

$|X(g) - E[X]| \geq \varepsilon\, E[X]$

$\Leftrightarrow (X(g) - E[X])^2 \geq (\varepsilon\, E[X])^2$

$$= \text{Prob}[\underbrace{(X - E[X])^2}_{\substack{\text{neue ZV}\\ \geq 0}} \geq \underbrace{(\varepsilon\, E[X])^2}_{\geq 0}]$$

$$\leq \frac{E[(X - E[X])^2]}{(\varepsilon\, E[X])^2}$$

Markov mit ZV $(X - E[X])^2$

Markov-Ungleichung auf Zufallsvariable anwenden!

$\underbrace{(E[X]-X)^2}$ ~~ZZ~~ ist Zufallsvar.

$(E[X]-X)^2(g) = (E[X]-X(g))^2$

Markov: $Prob[(E[X]-X)^2 \geq a] \leq \frac{E[(E[X]-X)^2]}{a}$

Was ist $E[(E[X]-X)^2]$?

$\cancel{(E[X]-X(g))^2 =}$

$(E[X]-X)^2(g) = (E[X]-X(g))^2$

$= E[X]^2 - 2X(g)\cdot E[X] + \underbrace{(X(g))^2}$

$= \boxed{E[X]^2 - 2X\cdot E[X] + X^2} = X^2(g)$

$E[E[X]^2 - 2X\,E[X] + X^2] = E[X]^2 - 2\,E[X]^2 + E[X^2]$

$= \boxed{E[X^2]-(E[X])^2} \geq 0$!

Das jetz oben einsetzen liefert:

$Prob[(E[X]-X)^2 \geq a] \leq \frac{E[X^2]-(E[X])^2}{a}$

18.4.17

$X = \#$Kanten

$$E[X]^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\binom{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{16}\cdot n^2\cdot(n^2-2n+1)$$
$$= \frac{1}{16}\cdot n^4 - 2n^3 + n^2$$
$$= \frac{1}{16}\cdot n^4 + n^4\left(-\frac{2}{n} + \frac{1}{\cancel{2}n^2}\right)$$
$$= \frac{1}{16}n^4\cdot\Big(1 + \underbrace{O\left(\tfrac{1}{n}\right)}_{\to 0}\Big)$$

Es bleibt $E[X^2] = \sum_{g} (X(g))^2 \cdot \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}}$

$$= \sum_{m} m^2 \binom{\binom{n}{2}}{m} \cdot \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}}$$

$\to$ schwierig!

Besser geht es so: $X(g) = X_1(g) + \dots + X_{\binom{n}{2}}(g)$

$X_i(g) \cancel{X_1} = \begin{cases} 1 & i\text{'te Kante da} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$X^2 = \left(X_1 + \dots + X_{\binom{n}{2}}\right)\cdot\left(X_1 + \dots + X_{\binom{n}{2}}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} \sum_{j=1}^{\binom{n}{2}} X_i \cdot X_j$$
$$= \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} X_i + \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\binom{n}{2}} X_i\cdot X_j$$
$$= \sum X_i + \sum_{\substack{\{i,j\} \\ i\neq j}} 2\cdot X_i \cdot X_j$$

Jetzt den Erwartungswert von X^2:

$$E[X^2] = E[X] + 2 \sum_{\substack{\{i,j\} \\ i \neq j}} E[X_i \cdot X_j]$$

X_i, X_j sind unabhängig!

$$E[X_i \cdot X_j] = 1 \cdot \mathrm{Prob}[X_i = 1 \wedge X_j = 1]$$

$$= \mathrm{Prob}[X_i = 1] \cdot \mathrm{Prob}[X_j = 1]$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\binom{n}{2} + 2 \cdot \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\binom{n}{2} + 2 \cdot \binom{\binom{n}{2}}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{4}\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{4}\binom{n}{2} + \frac{1}{4}\binom{n}{2}\binom{n}{2}$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}\binom{n}{2} + E[X]^2} \quad \boxed{= E[X^2]}$$

Zähler d. Markov-Ungl.: $E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{4}\binom{n}{2}$

$$\mathrm{Prob}\left[(X - E[X])^2 \geq \alpha\right] \leq \frac{\frac{1}{4}\binom{n}{2}}{\alpha}$$

Mit $\alpha = (\varepsilon \cdot E[X])^2$ $\varepsilon > 0$, konst.

dann

$$\frac{\cancel{\frac{1}{4}\binom{n}{2}}}{\varepsilon^2 \cdot \cancel{\frac{1}{4}\binom{n}{2}}\binom{n}{2}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Was heißt das jetzt für die ursprünglichen Graphen?

Für alle g gilt:

$$\left(X(g) - E[X]\right)^2 \geq \left(\varepsilon \cdot E[X]\right)^2$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left| X(g) - E[X] \right| \geq \varepsilon \cdot E[X]$$

$\Longleftrightarrow$

Ist $X(g) \geq E[X]$, dann

$$X(g) \geq (1+\varepsilon)\, E[X].$$

Ist $X(g) \leq E[X]$, dann

$$\cancel{X(g) \leq} \ (1-\varepsilon)\, E[X] \geq X(g).$$

$\text{Prob}\left[X \geq \frac{9}{10}\binom{n}{2}\right]$?

$$X \geq \frac{9}{10}\binom{n}{2} \Longleftrightarrow X \geq E[X] + \frac{4}{10}\overset{\binom{n}{2}}{\cancel{E[X]}} = \frac{8}{10}\binom{n}{2}$$

$$= E[X]\left(1 + \frac{8}{10}\right)$$

Also für die W-keit dann:

$$* \ \text{Prob}[\ ] \leq \frac{1}{\left(\frac{8}{10}\right)^2 \binom{n}{2}}$$

//

18.4.17

Zurück zum backtracking Algorithmus

Z.V. $I = \#$ unabhängige Mengen eines zufälligen Graphen.

$I($  $) = 3+1 = 4$

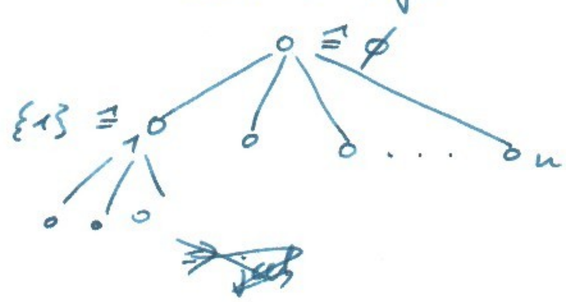
↓

z. $\emptyset$ als unabh. M.

$I($  $) = 3+3+1+1 = 8$

Zusammenhang zum Algorithmus?

BT-Baum d. Algo.:



Beobachtung: jeder Knoten des Backtracking-Baumes ist genau eine unabhängige Menge des Graphen und umgekehrt.

(I ist dann auch die Größe des Baumes)

$I = \#$ Knoten im BT-Baum

$E[I] =$ Erwartungswert der # Knoten

$$E[I] = \sum_g I(g) \cdot \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}}$$

$\Rightarrow$ Wie ausrechnen???

18.4.17

$I(\mathcal{G})$ = Summe von Indikatoren?

$$I(\mathcal{G}) = \sum_{S \subseteq V} I_S(\mathcal{G})$$

$$I_S(\mathcal{G}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } S \text{ unabh. M.} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$S \cap T = \emptyset$, dann I_S, I_T unabh.

$S \supseteq T$ $I_S = 1$, dann $I_T = 1$

d.h. I_S, I_T i.A. nicht unabhängig!

$$E[I] = \sum_{S \subseteq V} E[I_S] = \sum_{S \subseteq V} \cancel{P}\text{Prob}[S \text{ unabhängige Menge in } \mathcal{G}]$$

$|S| = \# S = k$, dann

$$\text{Prob}[S \text{ unabhängig}] = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$$

$S = \{1,2\} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$

$S = \{1,2,3\} \rightsquigarrow \frac{1}{8}$

$S = \{1,\dots,k\} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$

$S = \{1,\dots,n\} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}}$

$$E[I] = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \cdot \binom{n}{k}$$

\# der ~~$S \subseteq V$~~ $S \subseteq V$ mit k Elementen.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{k^2}$ fällt in k

$\binom{n}{k}$ steigt bis $k = \frac{n}{2}$, fällt dann.

$$E[I] = \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \cdot \binom{n}{k} = O\left(n^{\log_2 n}\right)$$ (Quasipolynomiell) 18.4.17

$\Downarrow$

nächste Woche!

$n^{\log_2 n} = 2^{(\log_2 n)^2}$

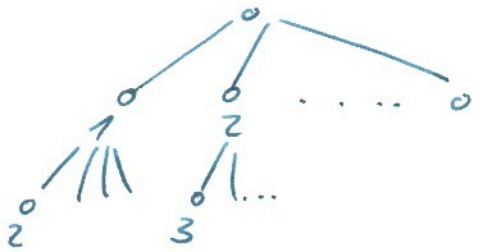
$n^c = 2^{c \cdot \log n}$

$n^{\sqrt[100]{n}} \gg n^{\log_2 n}$

Exponentiell!

25.4.17

Backtracking Algorithmus



Jede Teilmenge entspricht genau einem Knoten.

Zufallsvariable $I(G) \to \mathbb{N}$

$I(G)$ = # Knoten, die der backtracking Algorithmus bei G besucht.

$$I = I_\emptyset + I_{\{1\}} + I_{\{2\}} + \dots + I_{\{1,2\}} + \dots + I_{\{1,2,\dots,n\}}$$

$$I_T(G) = \begin{cases} 1 & \text{gdw. } T \text{ ist unabh. Menge in } G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$T \subseteq \{1,\dots,n\}$

- Die I_T sind abhängig. $\Rightarrow I_{\{1,2,3\}} = 1 \Rightarrow I_{\{1,2\}} = 1$

25.4.17

$$E[I] = \sum_T E[1_T] = \sum_T \text{Prob}[T \text{ ist unabh. Menge}]$$

Was ist Prob[T unabhängig] ?

- $T = \emptyset \Rightarrow P[\,] = 1$

  $T = \{x\} \Rightarrow P[\,] = 1$, aber sonst ?!

- Wie bei $T = \{u, v\}$? $u \neq v$, u, v fest (etwa 1, 2)

  – dann $\frac{1}{2}$

- $T = \{u, v, w\} \rightsquigarrow \frac{1}{2^3}$

- $T = \{u, v, w, x\} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{4}{2}}$

- $|T| = k \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$

Also: $$\underbrace{\sum_{k=0}^{n}}_{n+1 \text{ Summanden}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}}_{\text{Prob}[T \text{ unabh.}\,;\ \# |T| = k]} \cdot \underbrace{\binom{n}{k}}_{\#\text{Teilmengen mit } k \text{ Elementen}} = \sum_T \text{Prob}[T \text{ unabhängig}] = E[I]$$

Ziel: $O(n^{\log n})$

Einschub: $\binom{n}{k} \le \binom{n}{k+1}$ solange $k+1 \le \frac{n}{2}$

$$\binom{n}{k} \lneq \binom{n}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \lneq \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n-k} \lneq \frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow k+1 \lneq n-k \Leftrightarrow 2k \le n-1 \Leftrightarrow k \le \frac{n-1}{2}$$

$2k+1 \lneq n$

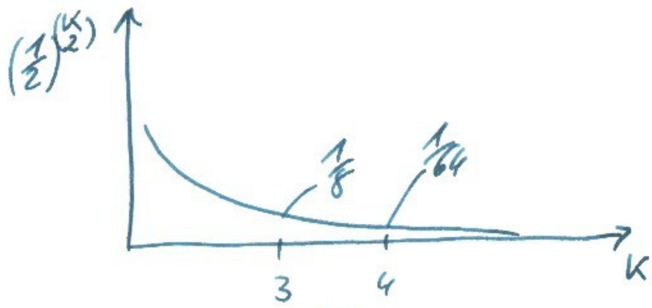
$\Leftrightarrow 2k+2 \le n$

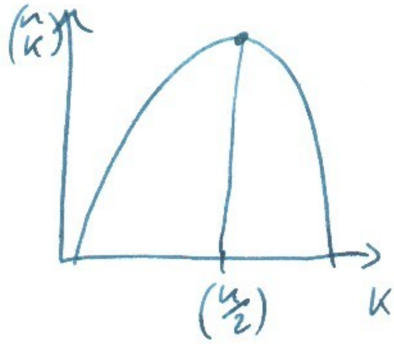
$\Leftrightarrow k+1 \le \frac{n}{2}$

n+1 Summanden! 25.4.17

1. Versuch: Summe $\leq (n+1) \cdot$ größter Summand.

Was ist der größte Summand?





$t_k = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$

k-ter Summand.

fällt.

Vermutung $t_0 < t_1 < t_2 < \dots \cancel{<t_{k_0-1}>} \; t_{k_0} > t_{k_0+1} > t_{k_0+2} > \dots$

steigt

$$\frac{t_k}{t_{k-1}} = \frac{\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}}{\binom{n}{k-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k-1}{2}}} = \frac{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}-\binom{k-1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{n-k+1}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$\binom{k}{2}-\binom{k-1}{2} = \frac{k(k-1)-(k-1)(k-2)}{2} = k-1$$

$$= \frac{n-k+1}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{k} \cdot (n-k+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

fällt

Fällt echt in k?

f. $k=1$ ist das n

$k=1$ $\quad \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

25.4.17

Wo ist der Quotient „$=1$"?
Genauer: Erster Index, wo Quotient „<1".

Das sei k_0!

$$\frac{t_{k_0}}{t_{k_0-1}} \leq 1, \quad \frac{t_{k_0-1}}{t_{k_0-2}} > 1 \quad \ldots$$

Dann gilt $t_0 < t_1 < \ldots < \underbrace{t_{k_0-1}}_{\text{Das ist das Maximum.}} \geq t_{k_0} > t_{k_0+1} > \ldots$

Es gilt: $\log_2 n - \log_2(\log_2 n) \leq k_0 \leq \log_2 n$

- Für $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$ gilt:

$$\frac{t_k}{t_{k-1}} = \frac{n - \lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{\lfloor \log_2 n \rfloor} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \log_2 n \rfloor - 1}$$

$$= \frac{2n - 2\lfloor \log_2 n \rfloor + 2}{\lfloor \log_2 n \rfloor} \cdot \frac{1}{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}}$$

$$= \underbrace{\frac{2n}{\lfloor \log_2 n \rfloor \cdot 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2\lfloor \log_2 n \rfloor}{\lfloor \log_2 n \rfloor\, 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{\ldots}}_{\to 0}$$

$\# < 1$ also gilt $k_0 \leq \lfloor \log_2 n \rfloor$

25.4.17.

- Für $K = \lceil \log_2 n - \log_2(\log_2 n) \rceil$

$$\left(\begin{aligned} 2^K &\leq 2^{\log_2 n - \log_2 \log_2 n + 1} \\ &= 2 \frac{n}{\log_2 n} \end{aligned} \right.$$

Nenner:

$$\leq \log_2 n \cdot 2 \cdot \frac{n}{\log_2 n} \cdot \frac{1}{2} = n$$

$$n - K + 1 = n - \lceil \log_2 n - \log_2 \log_2 n \rceil$$

$$\geq n - (\log_2 n - \log_2(\log_2 n)) - 1$$

$$\frac{t_K}{t_{K-1}} = \frac{n-K+1}{K} \cdot \frac{1}{2^{K-1}} \quad \Big| \quad K = \log_2 n - \log_2(\log_2 n)$$

wollen Zeigen: $\frac{t_K}{t_{K-1}} > 1$?

$$\frac{n - \log_2 n + \log_2(\log_2 n) + 1}{\log_2 n - \log_2(\log_2 n)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 n - \log_2(\log_2 n) - 1} \overset{!}{>} 1$$

$$= \frac{2(n - \log_2 n + \log_2 \log_2 n + 1)}{\log_2 n - \log_2(\log_2 n)} \cdot \cancel{\frac{n}{\log_2 n}} \cdot \frac{\log_2 n}{n}$$

$$= \frac{2(n - \log_2 n + \log_2(\log_2 n) + 1)}{n\left(1 - \frac{\log_2 \log_2 n}{\log n}\right)} \qquad \left(\frac{\log_2 \log_2 n}{\log n} \to 0 \right.$$

$$= \underbrace{\frac{2n}{n(1-\dots)}}_{\to 2} - \underbrace{\frac{2(\log_2 n)}{n(1-\dots)}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{n(1-\dots)}}_{\to 0} \to 2 > 1$$

25.4.17

$\Rightarrow t_k$ ist maximal für

$$\log_2 n - \log_2(\log_2 n) \le t_k \le \log_2 n \quad ?$$

26.4.17

$t_k = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$ $\quad t_k = E[\#$ unabh. Mengen d. Größe $k]$

$k = 0, 1, \ldots, n \qquad \binom{k}{l} = 0$ falls $l > k$

$t_0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1\ ,\ t_1 = n\ ,\ \ldots,\ t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$t_2 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(n^2 - n) = \frac{1}{4} n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4} n^2 (1 - o(1))$$

$$\frac{t_k}{t_{k-1}} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{2(n-k+1)}{k} \cdot \frac{1}{2^k}$$

$\frac{t_1}{t_0} = \frac{n}{1}$ ✓ (>1)

$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{2^n}\ (<1)$

streng monoton fallend in k (k kann sogar ~~reell~~ reell sein)

Also $\underbrace{\frac{t_1}{t_0}}_{n} > \frac{t_2}{t_1} > \ldots > \underbrace{\frac{t_n}{t_{n-1}}}_{\ll 1}$

$\geq 1 \qquad \frac{t_k}{t_{k_0}} < 1$

$$\boxed{k_0 := \text{~~Minimales k~~}\ \operatorname{Min}\left\{ k \,\middle|\, \frac{t_k}{t_{k-1}} < 1 \right\}}$$

$$\left(= \operatorname{Max}\left\{ k \,\middle|\, \frac{t_k}{t_{k-1}} \geq 1 \right\} + 1 \right)$$

Sinn der Sache: $t_k / t_{k-1} \geq 1 \iff t_k \geq t_{k-1}$

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots \leq \underbrace{t_{k_0 - 1}}_{\text{größter Wert der Folge!}} > t_{k_0} > \ldots > t_n$$

Müssen t_{k_0-1} kennen. Dazu k_0 !

- Behauptung: $\underbrace{\log_2 n - \log_2(\log_2 n)}_{} \leq k_0$, $k_0 \leq \log_2 n$

$$= \log_2 n \Big(1 - \underbrace{\frac{\log_2(\log_2 n)}{\log_2 n}}_{o(1)}\Big)$$

Zeigen dazu: ~~$t_{\log_2 n}$~~

$$\left(\frac{t_k}{t_{k-1}}\right) = \left(\frac{2(n-k+1)}{k} \cdot \frac{1}{2^k}\right)\Big|_{k=\log_2 n} \overset{!}{<} 1$$

und

$$\left(\frac{t_k}{t_{k-1}}\right)\Big|_{k=\log_2 n - \log_2 \log_2 n} \overset{!}{>} 1$$

1) $k = \log_2 n$

$$\frac{2(n-(\log_2 n)+1)}{\log_2 n \cdot n} = \underbrace{\frac{2n}{n\log_2 n}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2\cdot \log_2 n}{n \log_2 n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\cancel{x}2}{n\log_2 n}}_{\to 0} = o(1)$$

$\forall\ n \geq 3$ od. 4

geht gegen 0

2) $k = \log_2 n - \log_2(\log_2 n)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 n - \log_2(\log_2 n)} = \frac{2^{\log_2 \log_2 n}}{2^{\log n}} = \frac{\log_2 n}{n}$$

26.1.17

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{\log_2 n-\log_2\log_2 n}\cdot\frac{\log_2 n}{n}$$

$$=\frac{1}{n\left(1-\frac{\log_2\log_2 n}{\log_2 n}\right)}$$

$$\frac{2(n-k+1)}{k\cdot 2^k}=\frac{\overbrace{2\left(n-\log_2 n+\log_2(\log_2 n)+1\right)\cdot\log_2 n}^{\sim n\cdot\log n}}{\underbrace{\left(\log_2 n-\log_2(\log_2 n)\right)\cdot n}_{\sim n\cdot\log n}}\overset{!}{>}1$$

$$=2\cdot\frac{n\cdot\log_2 n\,(1+o(1))}{n\cdot\log_2 n\,(1+o(1))}$$

$$=2\left(\frac{1+o(1)}{1+o(1)}\right)\to\underline{\underline{2}}$$

$f(n)\to 0$

$g(n)\to 0$

$\underline{\underline{>1}}$

$$\cancel{1+g}$$

$$\frac{1+f(n)}{1+g(n)}$$

$$=\frac{1+g(n)-g(n)+f(n)}{1+g(n)}$$

$$=1-\frac{g(n)+f(n)}{1+g(n)}$$

$$=1-o(1)$$

t_{k_0-1} ist Maximum $\left(\frac{t_{k_0}}{t_{k_0-1}}<1\right)$

$$\log_2 n-\log_2\log_2 n\le k_0\le\log_2 n$$

Es bleibt t_{k_0} zu berechnen, in diesem Intervall.

Müssen $t_{k_0-1}\le n^{\log n}$ abschätzen.

Gibt Schranke $(n+1)\,n^{\log n}$, da $n+1$ Summanden.

$t_K = \binom{n}{K} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{K}{2}}$, unsere K einsetzen.

$t_K \leq$?

1) für $K = \lfloor \log_2 n \rfloor$

$\binom{n}{K} = \frac{(n)_K}{K!} \leq \frac{n^K}{K!} < n^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$

Mit $\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{K}{2}}$ erst recht.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{K}{2}} \rightsquigarrow 2^{(\log_2 n)^2} = n^{(\log n)}$

2) für $K = \lfloor \log_2 n \rfloor - \underbrace{\log_2(\log_2 n)}_{l \leq \log_2(\log_2 n)}$

$\binom{n}{K} = \frac{n^{\lfloor \log_2 n \rfloor - l}}{(\lfloor \log_2 n \rfloor - l)!}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{K}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{\lfloor \log_2 n \rfloor - l}{2}} < 1$

Also $\leq \underline{\underline{n^{\log_2 n}}}$

26.4.17

Was bedeutet der Erwartungswert?

$E[I]$, $I = \#$ unabh. Mengen.

$$\mathrm{Prob}\left[I \geq a\, E[I]\right] \leq \frac{1}{a}$$

$$\mathrm{Prob}\left[I \geq a \cdot n^{\log n}\right] \leq \frac{1}{a}$$

Kantenanzahl $= \frac{1}{2}\binom{n}{2}$

Summe von unabhängigen ZV (jede Kante)

Betrachten $I^{(1)}, I^{(2)}, \dots, I^{(m)}$

$$I^{(k)}(\underbrace{g_1, \dots, g_m}_{\left(\frac{1}{2}\right)^{m\binom{n}{2}}}) = I(g_k)$$

Produktraum!

$$E\left[I^{(1)} + \dots + I^{(m)}\right] = m \cdot E[I]$$

$$\mathrm{Prob}\left[\underbrace{\left|I^{(1)} + \dots + I^{(m)} - m \cdot E[I]\right| > \varepsilon m \cdot E[I]}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{I^{(1)} + \dots + I^{(m)}}{m} - E[I] \right| > \varepsilon\, E[I]$$

26.4.17

$$\mathrm{Prob}\left[(I^{(1)} + \ldots + I^{(m)} - m\,E[I])^2 \geq \varepsilon^2 m^2\, E[I]^2 \right]$$

$$\leq \frac{E[(I^{(1)} + \ldots + I^{(m)} - m\,E[I])^2]}{\varepsilon^2 \cdot m^2 \cdot E[I]^2}$$

$$((I^{(1)} + \ldots + I^{(m)}) - m\,E[I])^2 =$$

$$(I^{(1)} + \ldots + I^{(m)})^2 - 2(I^{(1)} + \ldots + I^{(m)})\,m\,E[I]$$

$$+ (m\,E[I])^2$$

$$E[(\ldots)^2] = E[(I^{(1)} + \ldots + I^{(m)})^2] - m^2\, E[I]^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{Prob}[\quad] \leq \frac{E[(I^{(1)} + \ldots + I^{(m)})^2] - m^2\, E[I]^2}{\varepsilon^2\, m^2\, E[I]^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{E[(I^{(1)} + \ldots + I^{(m)})^2]}{m^2\, E[I]^2} - 1 \right)$$

2.5.17

Zur Bedeutung des Erwartungswertes, Gesetz der großen Zahlen

Sei I unsere Zufallsvariable, z.B. Laufzeit eines Algorithmus auf best. Eingabe.

Sei der Erwartungswert $E[I]$ bekannt.

Was sagt dieser Wert aus? Wie groß ist die tatsächliche Laufzeit?

$\Rightarrow$ im Mittel, d.h. wenn wir den Algo. oft genug mit unabhängig gezogenen Eingaben laufen lassen, nähert sich die Laufzeit dem E-Wert an.

~~Dazu fo~~

Dazu die folgende Betrachtung:

- Wir lassen den Algorithmus m-mal laufen, dazu ziehen wir m Graphen $G_1, \dots, G_m$ unabhängig voneinander.
- $I^{(1)}$ ist dann die ZV f. die Laufzeit auf G_1 usw.

ganz formal: $I^{(i)}(G_1, \dots, G_m) = $ Laufzeit auf G_i.

$= I(G_i)$

2.5.17

- Die $I^{(i)}$ sind unabhängig und verhalten sich sonst genau wie I.

~~• Was ist jetzt die W-Keit, dass die~~

- Die Erwartete Zeit für die m Durchläufe ist also $m \cdot E[I]$.

- Wie groß ist jetzt die Wkt, dass wir davon stark abweichen?

  ⇒ mit Markov.

[Dazu ev. noch $X = \sum_{i=1}^{m} I^{(i)}$, $\cancel{E[X] = m \cdot E[I]}$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{m} E[I^{(i)}] = m \cdot E[I]$$]

$$\text{Prob}\left[\left(\sum I^{(i)} - m \cdot E[I]\right)^2 \geq (\varepsilon \cdot m \cdot E[I])^2\right] ?$$

Das ist äquivalent zu

$$\text{Prob}\left[\left(\underbrace{\frac{\sum I^{(i)}}{m}}_{\substack{\text{Sample Mean} \\ \text{(gemittelter tatsächlich} \\ \text{auftretender Wert)}}} - E[I]\right)^2 \geq (\varepsilon \cdot E[I])^2\right]$$

$$\underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{E\left[\left(\frac{\sum I^{(i)}}{m} - E[I]\right)^2\right]}{(\varepsilon \cdot \cancel{m} \cdot E[I])^2} = \cancel{E[\sum I^{(i)}}$$

2.5.17.

$$\frac{E\left[\left(\frac{\sum I^i}{m} - E[I]\right)^2\right]}{(\varepsilon \cdot E[I])^2}$$

$$\overset{*}{=} \frac{E\left[\left(\frac{\sum I^{(i)}}{m}\right)^2\right] - E[I]^2}{(\varepsilon \cdot E[I])^2}$$

Brauchen jetzt $E\left[\left(\frac{\sum I^{(i)}}{m}\right)^2\right]$:

$$\left(\sum I^i\right)^2 = \left(I^{(1)} + I^{(2)} + \ldots + I^{(m)}\right) \cdot \left(I^{(1)} + \ldots + I^{(m)}\right)$$

$$= \sum_i \sum_{j, j \neq i} I^{(i)} \cdot I^{(j)} + \sum_i \left(I^{(i)}\right)^2$$

Also wegen Linearität d. E-Wertes:

$$E\left[\left(\sum I^{(i)}\right)^2\right] = \sum_i \sum_{j, j\neq i} E\left[I^{(i)} \cdot I^{(j)}\right] + \sum_i E\left[\left(I^{(i)}\right)^2\right]$$

$$= \sum_i \sum_{j, j \neq i} \left(E[I^{(i)}] \cdot E[I^{(j)}]\right) + \sum_i E\left[\left(I^i\right)^2\right]$$

$$= m(m-1)\, E[I]^2 + m \cdot E[I^2]$$

Insgesamt haben wir jetzt:

$$P[\ \ ] \leq \frac{\frac{m \cdot E[I^2] + m(m-1)\, E[I]^2}{m^2} - E[I]^2}{(\varepsilon \cdot E[I])^2}$$

$$\overset{*}{=} \frac{\frac{E[I^2]}{m} + \frac{(m-1)}{m} E[I]^2 - E[I]^2}{(\varepsilon \cdot E[I])^2}$$

2.5.17

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{E[I^2]}{m\cdot(E[I])^2} + \overbrace{\left(\frac{(m-1)}{m} - 1\right)}^{=-\frac{1}{m}} \cdot \cancel{(E[I])^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2\cdot m}\left(\underbrace{\frac{E[I^2]}{(E[I])^2}} - 1 \right)$$

Das ist eine Zahl.

<u>Damit haben wir jetzt:</u>

$$\mathrm{Prob}\left[\left(\frac{\sum I^{(i)}}{m} - E[I] \right)^2 \geq (\varepsilon \cdot E[I])^2 \right]$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot m}\left(\underbrace{\frac{E[I^2]}{(E[I])^2}}_{\substack{>1,\\ \text{endlich}}} - 1 \right)$$

Für große m geht das gegen $\emptyset$,

d.h. die mittlere Laufzeit liegt nahe am Erwartungswert!

2.5.17

2. Graphfärbung

Das Problem ansich sollte klar sein.
Haben Graph $G=(V,E)$, $|V|=n$ mit unger. Kanten und k Farben.

Wollen die Knoten so färben, dass keine 2 mit einer Kante verbundenen Knoten die gleiche Farbe haben.

Färbung $G' : G \to \{1,\dots,k\}^n$ (f. jede der n Knoten eine Farbe)

ist gültig

$\iff \forall v_i, v_j \; i \neq j \; \text{Farbe}(v_i) \neq \text{Farbe}(v_j)$ falls $\{v_i, v_j\} \in E$.

Wie findet man eine (alle) gültigen Färbungen eines Graphen?

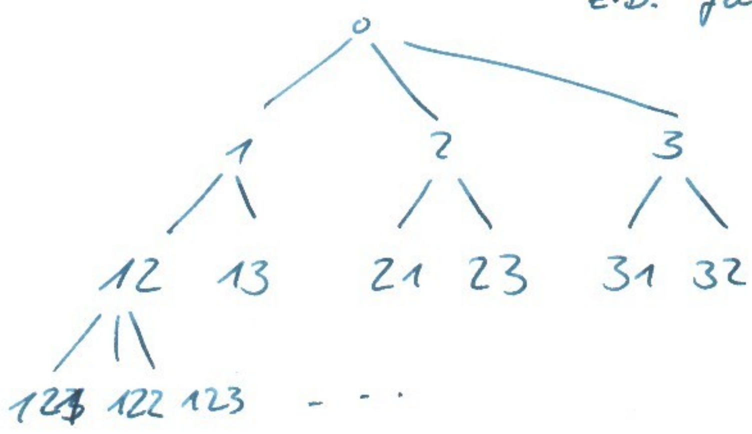
Einfacher Backtracking Algoritmus:

- Färbe die Knoten der Reihe nach, mit der kleinsten noch erlaubten Farbe (d.h. keiner der bereits gefärbten Nachbarn hat diese Farbe)
- Falls für einen Knoten keine Farbe mehr frei: $\rightsquigarrow$ Backtracking!

2.5.17

Das gibt einen Backtracking-Baum der Art:

z.B. für $k=3$

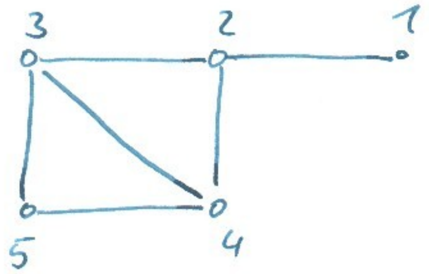


⇐ Knoten 1 hat Farbe 1, 2, od. 3.

⇐ Knoten 2

z.B. für den Fall $\{1,2\} \in E$, $\{1,3\}$ und $\{2,3\} \notin E$.

Beispiel aus Buch:



geht nicht mit 2 Farben!

Wollen Zeigen:

· Ziehen wir den Graph wieder wie im 1. Kapitel, d.h. Wkt. f. eine Kante $= \frac{1}{2}$, also alle $2^{\binom{n}{2}}$ mögl. Graphen haben die gleiche ~~Wahrsch~~ Wahrscheinlichkeit

$$P[G] = \cancel{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}}$$

Dann ist die Erwartete Laufzeit für den Algorithmus Konstant!

⇒ D.h. unabhängig von der Knotenzahl n !!!

2.5.17.

<u>Zunächst:</u>

- Bei ~~n Knoten~~ L Knoten und K Farben gibt es K^L mögliche Färbungen.

  Für einen festen Graphen sind nicht alle erlaubt.

- Das ganze geht von hinten durch die Brust ins Auge!

- Halten wir eine Färbung φ' fest. Wieviele Graphen gibt es, bei denen diese Färbung erlaubt ist?

  $\rightsquigarrow$ Das hängt nur von der Anzahl der Knoten, die mit Farbe i gefärbt sind ab!

<u>Lemma:</u> Färbung φ' fest. K Farben, L Knoten

\# Graphen mit dieser Färbung ist

$$\leq 2^{L^2 (1-\frac{1}{k}) \cdot \frac{1}{2}}$$

<u>Beweis:</u> · Wir haben L Knoten und zählen die „erlaubten" Kanten!

· Sei φ' die Färbung mit

s_1 Knoten in Farbe 1,

s_2 Knoten in Farbe 2, usw.

2.5.17

· Zwischen unterschiedliche Farben sind Kanten erlaubt.

z.B. zw. Farbe 1 und 2 ~~also~~ können also $s_1 \cdot s_2$ viele Kanten gezogen werden (oder auch nicht!)

für die anderen Farben genauso. Also gibt es

$$s_1 s_2 + s_1 s_3 + \ldots + s_1 \cdot s_k + s_2 \cdot s_3 + \ldots + s_2 \cdot s_k + \ldots + s_{k-1} \cdot s_k$$

viele „erlaubte" Kanten.

Das lässt sich auch anders schreiben

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(s_1 + s_2 + \ldots + s_k)}_{=L\text{, da jeder Knoten gefärbt wird}}^2 - \frac{1}{2}(s_1^2 + \ldots + s_k^2)$$

$$= \frac{L^2}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{(s_1^2 + \ldots + s_k^2)}_{\text{Die Summe dieser Quadrate lässt sich abschätzen.}}$$

Es gilt $\sum_{i=1}^{k} s_i = L \Rightarrow \sum s_i^2 \geq \frac{L^2}{k}$.

<u>Damit</u>:

$$\leq \frac{L^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{L^2}{k} = \frac{1}{2}L^2\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

2.5.17

Ein Graph, der die Färbung c' erlaubt, hat also höchstens $\frac{1}{2}L^2(1-\frac{1}{k})$ viele Kanten.

Folglich gibt es höchstens ~~2~~

$$2^{\frac{1}{2}L^2(1-\frac{1}{k})}$$

viele Graphen mit dieser Färbung.

Diese Zahl ist unabhängig von der konkreten Färbung, gilt also für <u>alle</u> Färbungen. $\blacksquare$

· Nun zeigen wir noch die Behauptung von oben.

<u>Lemma:</u> Seien $s_1, s_2, \ldots, s_k$ Zahlen ≥ 0 und die Summe $\sum_{i=1}^{k} s_i = L$.

Dann ist die Summe der Quadrate mindestens $\frac{L^2}{k}$.

$$\underline{\sum_{i=1}^{k} s_i^2 \geq \frac{L^2}{k}}$$

<u>Beweis:</u> Die Behauptung folgt aus folgender Umformung.

$$0 \leq \underbrace{\sum \left(s_i - \frac{L}{k}\right)^2}$$

[gilt, da alle Summanden ≥ 0]

ab hier Umformung mit Gleichheit.

3.5.17

$$\sum_{i=1}^{k}\left(s_i - \frac{L}{k}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(s_i^2 - 2 s_i \frac{L}{k} + \frac{L^2}{k^2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} s_i^2 \overset{-}{\cancel{+}} \sum_{i=1}^{k} 2 s_i \frac{L}{k} + \sum_{i=1}^{k} \frac{L^2}{k^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} s_i^2 \overset{-}{\cancel{+}} 2 \frac{L}{k} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} s_i}_{\substack{= L \\ \text{nach} \\ \text{Voraussetzung}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{L^2}{k^2}}_{= k \cdot \frac{L^2}{k^2} = \frac{L^2}{k}}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} s_i^2 \overset{-}{\cancel{+}} 2 \frac{L^2}{k} + \frac{L^2}{k}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} s_i^2 - \frac{L^2}{k}$$

Damit haben wir:

$$0 \leq \sum s_i^2 - \frac{L^2}{k}$$

$$\iff \frac{L^2}{k} \leq \sum_{i=1}^{k} s_i^2$$

$\blacksquare$

3.5.17

Noch eine Überlegung zur Kantenanzahl

$$\frac{1}{2}L^2\left(1-\frac{1}{k}\right).$$ (Ist das viel oder wenig?)

Ein Graph mit L Knoten kann maximal

$$\binom{L}{2} = \frac{L(L-1)}{2} = \frac{1}{2}L^2\left(1-\underbrace{\frac{1}{L}}_{=o(1)}\right)$$

ungerichtete Kanten haben.

Für große L ist das ein fester (in Abhängigkeit von k) Anteil aller mögl. Kanten. Das sind immernoch viele ($O(L^2)$), aber doch deutlich entfernt von „fast alle".

Das erste obige Lemma führt jetzt zu folgender nützlichen Beobachtung. Wir betrachten die erlaubten Färbungen über alle Graphen hinweg. <u>D.h. Wir zählen für jeden Graph mit L Knoten die Anzahl seiner gültigen Färbungen!</u>

Lemma: Die # gültiger Färbungen mit K Farben aller Graphen mit L Knoten ist höchstens

$$K^L \cdot 2^{\frac{1}{2}L^2\left(1-\frac{1}{K}\right)}$$

3.5.17

Beweis: Wir wissen aus dem ersten Lemma, dass für eine feste Färbung maximal $2^{\frac{1}{2}L^2(1-\frac{1}{k})}$ passende Graphen existieren. Das gilt für jede Färbung gleichermaßen.

Zählen wir also so:

$$\sum_{\zeta'} \sum_{\substack{\mathcal{G} \text{ mit} \\ L \text{ Knoten}}} \{ \mathcal{G} \text{ erlaubt die Färbung } \zeta' \}$$

Dann ist diese Summe $\leq \underbrace{K^L}_{\#\text{Färbungen}} \cdot 2^{\frac{1}{2}L^2(1-\frac{1}{k})}$.

Da wir Paare $(\mathcal{G}, C)$ zählen, also ein Graph $\mathcal{G}$ mit ~~zu~~ erlaubter Färbung ζ', ist diese Summe identisch mit

$$\sum_{\substack{\mathcal{G} \\ \text{mit } L \\ \text{Knoten}}} \sum_{\zeta'} \{ \zeta' \text{ ist gültige Färbung für } \mathcal{G} \}.$$

Also gilt die Schranke hier ebenso. ☒

zur Erklärung: • große Tabelle mit Zeilen für alle mögl. Färbungen und Spalten für alle mögl. Graphen auf L Knoten.

• Einträge bedeuten „$\mathcal{G}$ erlaubt ζ'" bzw. „ζ' ist erlaubte F. für $\mathcal{G}$"

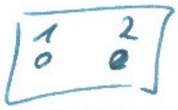
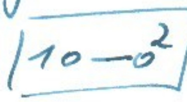
• Zählen einmal über die Zeilen und einmal über die Spalten! Da kommt das gleiche raus!

3.5.17

Kommen wir zurück zum Algorithmus und betrachten den Backtrackingbaum nocheinmal genauer:

- In <u>Tiefe 1</u> wird der Knoten 1 betrachtet. Dort stehen alle Färbungen des Knotens 1 mit k Farben.

- In <u>Tiefe 2</u> werden die Knoten 1 und 2 betrachtet. Falls $\{1,2\}$ eine Kante in G ist, haben 1 und 2 versch. Farben, sonst beliebig.

  Hier stehen also alle Färbungen ~~des Teilgra~~ des Graphen  bzw. , je nachdem, ob $\{1,2\} \in E$ oder nicht.

- <u>Allgemein gilt</u>: Erreicht der Algorithmus im Backtrackingbaum in Tiefe L, so werden die Knoten $1, 2, \ldots, L$ gefärbt. Dabei werden die Kanten innerhalb der Knotenmenge $\{1, 2, \ldots, L\}$, die in G vorhanden sind beachtet.
  An dieser ~~st~~ Stelle steht also eine erlaubte Färbung des durch die Knotenmenge $\{1, \ldots, L\}$ induzierten Teilgraphen von G.

3.5.17

Wir nennen diesen Graphen $\underline{\underline{H_L(G)}}$.
~~$H_L(G)$~~

In Tiefe L des Backtrackingbaumes von G stehen also <u>alle</u> erlaubten K-Färbungen des Teilgraphen $H_L(G)$.

Bezeichne diese Zahl mit ~~$P(K$~~

$$P(K, H_L(G)).$$

In Tiefe n stehen dann alle erlaubten K-Färbungen von G.

Die Laufzeit des Algorithmus hängt sicher mit der Größe des Backtrackingbaumes zusammen.
Falls G <u>keine</u> K-Färbung hat, werden alle Knoten des Baumes durchlaufen.

(Der Aufwand pro Knoten ist hier erstmal außer-acht gelassen. Ich sehe jetzt nicht, dass man da i.A. mit $O(1)$ hinkommt.
Wie wir ~~später sehe~~ gleich sehen, ist ~~der~~ die ~~Größe des~~ mittlere Größe des Baumes und damit auch die mittlere Tiefe durch eine Konstante unabhängig von n beschränkt.
Damit sollte der ~~Auf~~ Aufwand pro ~~Au~~ Aufruf mehr oder weniger egal sein.)

3.5.17

Was ist also die mittlere Größe eines Backtrackingbaumes?

X ist Zufallsvariable für Größe des Backtrackingbaumes zu G.

feste Parameter, die wir nicht in die Notation packen:

- G hat n Knoten
- es stehen k Farben zur verfügung
- die Graphen werden uniform gezogen, d.h.

$$Prob[G] = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}}$$

(jeder Graph hat die gleiche Wkt.)

~~Algo~~

Also ist $E[X] = \sum_{G} Prob[G] \cdot X(G)$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}} \cdot \sum_{G} X(G)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}} \sum_{G} \{\# \text{ Knoten im BT-Baum zu } G\}$$

Wie zählen wir das?

$\Rightarrow$ Wir gehen Ebenenweise vor, die #Knoten pro Ebene haben wir uns vorhin bereits überlegt!

Damit: $E[X] = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}} \sum_{G} \sum_{L=0}^{n} (\#\text{Knoten } \cancel{\text{an}} \text{ in Tiefe } L)$ 3.5.17

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}} \sum_{G} \sum_{L=0}^{n} P(K, H_L(G))$$

Die Summen können wir wieder vertauschen.

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}} \sum_{L=0}^{n} \sum_{G} P(K, H_L(G))$$

Beachte: $P(K, H_L(G))$ kennen wir nicht!
Aber mit der Summe

$$\sum_{G} P(K, H_L(G))$$

können wir etwas anfangen.

1) Halten wir ein L fest. Für alle G, die ~~H_L als Teilgraph enthalten wird der gleiche Wert~~ einen bestimmten Graphen H auf L Knoten enthalten, wird der gleiche Wert gezählt. Und zwar $P(K, H = H_L(G))$. Ansonsten 0.
~~Wir können uns also auf die~~
Die restlichen Kanten in G sind egal. Wir können also auch die Summe über alle Graphen der Größe L bilden.

3.5.17

2) Die Summe über alle Graphen der Größe L von $P(K,H)$ kennen wir etwa. (Aus den vorherigen Lemmas)

es ist ~~P(K, H~~

$$\sum_{\substack{H \\ \text{mit } L \text{ Knoten}}} P(K,H) \leq K^L \cdot 2^{\frac{1}{2}L^2(1-\frac{1}{K})}$$

Zu 1) noch: Wieviele Graphen haben einen bestimmten ~~Graph~~ Graphen H (mit L Knoten) als Teilgraphen?

Das sind $2^{\binom{n}{2}-\binom{L}{2}}$ viele.

Beweis: Damit $H \subseteq G$ ist, müssen die Kanten auf den Knoten $\{1,\dots,L\}$ übereinstimmen, also sind $\binom{L}{2}$ Kanten der $\binom{n}{2}$ Möglichen bereits fest. Der Rest kann frei gewählt werden. Das sind eben $2^{\binom{n}{2}-\binom{L}{2}}$ Möglichkeiten.

Damit erhalten wir für $E[X]$ folgendes:

$\Downarrow$

3.5.17

$$E[X] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}} \sum_{L=0}^{n} P(K, H_L(g))$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}} \sum_{L=0}^{n} \sum_{\substack{H \text{ mit} \\ L \text{ Knoten}}} \left(2^{\binom{n}{2}-\binom{L}{2}} \cdot P(K,H)\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}} \sum_{L=0}^{n} 2^{\binom{n}{2}-\binom{L}{2}} \sum_{\substack{H \text{ mit} \\ L \text{ Knoten}}} P(K,H)$$

$$= \sum_{L=0}^{n} 2^{-\binom{L}{2}} \underbrace{\sum_{\substack{H \text{ mit} \\ L \text{ Knoten}}} P(K,K)}_{\text{mit 2) ist das } \leq 2^{\frac{1}{2}L^2(1-\frac{1}{k})} \cdot K^L}$$

<u>Also:</u> $$E[X] \leq \sum_{L=0}^{n} \left(2^{-\binom{L}{2}} \cdot K^L \cdot 2^{\frac{1}{2}L^2(1-\frac{1}{k})}\right)$$

Lassen wir n gegen ∞ gehen, gilt sicherlich:

$$E[X] \leq \sum_{L=0}^{\infty} \left(2^{-\binom{L}{2}} \cdot K^L \cdot 2^{\frac{1}{2}L^2(1-\frac{1}{k})}\right)$$

Dieser Ausdruck ist durch eine von K abhängige Konstante $h = h(K)$ beschränkt!

Das sieht man so:

- Zuerst bringen wir den Exponenten in eine brauchbare Form.

3.5.17

· für $L=0$ ist der Summand $=1$.

Also: $E[X] \leq 1 + \sum_{L=1}^{\infty} \left(2^{-\binom{L}{2}} \cdot K^L \cdot 2^{L^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-\frac{1}{K})} \right)$

· (für $L \geq 1$) und $K^L = 2^{(\log_2 K) \cdot L}$ schreiben wir den Exponenten so:

$\Rightarrow L \geq 1$ brauchen wir nicht!

$$-\binom{L}{2} + L \cdot \log_2 K + \frac{1}{2} L^2 \left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

$$= -\frac{L(L-1)}{2} + L \cdot \log_2 K + \frac{1}{2} L^2 \left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(L^2 - L\right) + L \cdot \log_2 K + \frac{1}{2}\left(L^2 - \frac{L^2}{K}\right)$$

$$= \frac{1}{2} L + L \cdot \log_2 K - \frac{L^2}{2K}$$

· für große L werden die Summanden im wesentlichen durch $2^{-\frac{L^2}{2K} \cdot O(1)}$ bestimmt.

~~· es gibt ein L_0, so dass~~

$$\cancel{2^{-\frac{L^2}{2K}} \geq 2^{\frac{1}{2}L + L \log_2 K - \frac{L^2}{2K}}} \text{ ist.}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow -\frac{L^2}{2K} \geq}$$

$$\cancel{2^{\frac{1}{2}L + L \cdot \log_2 K - \frac{L^2}{2K}} \leq 2^{-\frac{L^2}{2K} + \frac{L^2}{2} + L^2 \log_2 K}}$$

• Betrachten wir den Exponent genauer:

→ Das ist eine nach unten geöffnete Parabel!

· Für $L = 0$ ist der Exponent 0

· Für $L = K(1+2\log K)$ ebenfalls.

$$\left(\frac{1}{2}L + L\log_2 K - \frac{L^2}{2K}\right)$$

$$= L\left(\frac{1}{2} + \log_2 K - \frac{L}{2K}\right)$$

mit $L = K(1+2\log K)$

$$K(1+2\log K)\left(\underbrace{\frac{1}{2} + \log_2 K - \frac{K(1+2\log K)}{2K}}\right)$$

$$\frac{1}{2} + \log_2 K - \left(\frac{1}{2} + \log_2 K\right) = 0$$

• Dazwischen liegt ein Maximum!

Das interessiert uns aber nicht.

Interessanter ist folgendes:

für $L > K(1+2\log K)$ ist der Exponent immer < 0. D.h. die Summanden dort sind klein!

Wir setzen $L_0 = \lceil K(1+2\log_2 K)\rceil$ ~~und~~ $+1$ und zerlegen die Summe!

$$\boxed{L_0 = \lceil K\cdot(1+2\log_2 K)\rceil + 1}$$

4.5.17

$$E[X] \leq \sum_{L=0}^{\infty} 2^{-\frac{L^2}{2K} + \frac{L}{2} + L\log K}$$

$$= \sum_{L=\cancel{L_0}\,0}^{L_0-1} 2^{-\frac{L^2}{2K} + \frac{L}{2} + L\log K}$$

$$+ \sum_{L=L_0}^{\infty} 2^{-\frac{L^2}{2K} + \frac{L}{2} + L\log K}$$

Die erste Summe hat endlich viele (genau L_0) Summanden. Die können wir einfach ausrechnen! Wir schreiben $S_1 = S_1(K)$ dafür.

$$\boxed{S_1 = \sum_{L=0}^{L_0-1} 2^{-\frac{L^2}{2K} + \frac{L}{2} + L\log K}}$$

Für die zweite Summe machen wir folgendes:

Der Exponent lässt sich ~~leicht~~ ein wenig vergrößern. Es ist

$$-\frac{L^2}{2K} + \frac{L}{2} + L \cdot \log K \leq -\frac{L^2}{2K} + \frac{L}{L_0} \cdot \frac{L}{2} + \frac{L}{L_0} \cdot L \log K$$

$$= L^2 \left(-\frac{1}{2K} + \frac{1}{2L_0} + \frac{\log K}{L_0} \right)$$

für alle $L \geq L_0$, also für alle Summanden dieser Summe!

4.5.17

Damit ist $E[X] \leq S_1 + S_2$.

mit $$\boxed{S_2 = \sum_{L=L_0}^{\infty} 2^{L^2\left(-\frac{1}{2K} + \frac{1}{2L_0} + \frac{\log K}{L_0}\right)}}$$

Nach unserer Wahl für L_0 gilt

$$-\frac{1}{2K} + \frac{1}{2L_0} + \frac{\log K}{L_0} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2L_0} + \frac{\log K}{L_0} < \frac{1}{2K}$$

$$1 + 2\log K < \frac{2L_0}{2K}$$

$$K(1 + 2\log K) < L_0 = \lceil K(1+2\log K)\rceil + 1 \ \checkmark$$

Also ist

$$d = d(K) = 2^{L^2\left(-\frac{1}{2K} + \frac{1}{2L_0} + \frac{\log K}{L_0}\right)} < 1 \ !$$

Jetzt machen wir Schluß:

Nun ist $S_2 = \sum_{L=L_0}^{\infty} d^{L^2} \leq \sum_{L=0}^{\infty} d^{L^2} \leq \sum_{j=0}^{\infty} d^{j}$

$$\cancel{= \frac{1}{1-\frac{1}{d}}} \quad = \frac{1}{1-d} \qquad \text{da } 0<d<1$$

Also schließlich:

$$E[X] \leq S_1 + \frac{1}{1-d}$$

Das ist eine Konstante in Abhängigkeit von K.

```
> # Exponent komplett
  f := (L,K) -> -L^2/(2*K) + L/2 + L*log[2](K);
```

$$f := (L, K) \mapsto -\frac{L^2}{2\,K} + \frac{L}{2} + L \log_2(K) \tag{1}$$

```
> # Wert von L, wo der Exponent sicher kleiner 0 ist
  L[0] := K -> ceil(K*(1 + 2*log[2](K)))+1;
```

$$L_0 := K \mapsto \lceil K\,(1 + 2\log_2(K))\rceil + 1 \tag{2}$$

```
> # Wert von L, wo der Exponent maximal ist
  L[max] := K -> K*(1/2 + log[2](K));
```

$$L_{\max} := K \mapsto K\left(\frac{1}{2} + \log_2(K)\right) \tag{3}$$

```
> # Konstante im Exponenten
  c := K -> -1/(2*K) + 1/(2*L[0](K)) + log[2](K)/L[0](K);
```

$$c := K \mapsto -\frac{1}{2\,K} + \frac{1}{2\,L_0(K)} + \frac{\log_2(K)}{L_0(K)} \tag{4}$$

```
> # Basis in der zweiten Summe
  d := K -> 2^c(K);
```

$$d := K \mapsto 2^{c(K)} \tag{5}$$

```
> # Summe als ganzes
  S[0] := (K,n) -> sum(2^f(L,K), L=0..n);
```

$$S_0 := (K, n) \mapsto \sum_{L=0}^{n} 2^{f(L,\,K)} \tag{6}$$

```
> # Summe erster Teil mit L[0] Summanden
  S[1] := K -> sum(2^f(L,K), L=0..L[0](K)-1);
```

$$S_1 := K \mapsto \sum_{L=0}^{L_0(K)-1} 2^{f(L,\,K)} \tag{7}$$

```
> # Summe erster Teil mit Maximum abgeschätzt
  S[11] := K -> L[0](K)*2^f(L[max](K),K);
```

$$S_{11} := K \mapsto L_0(K)\, 2^{f\left(L_{\max}(K),\, K\right)} \tag{8}$$

```
> # Summe zweiter Teil, der Rest
  S[2] := K -> sum(d(K)^(L^2), L=L[0](K)..infinity);
```

$$S_2 := K \mapsto \sum_{L=L_0(K)}^{\infty} d(K)^{L^2} \tag{9}$$

```
> # Summe zweiter Teil, nochmal grob abgeschätzt
  S[3] := K -> sum(d(K)^L, L=L[0](K)..infinity);
```

$$S_3 := K \mapsto \sum_{L=L_0(K)}^{\infty} d(K)^{L} \tag{10}$$

```
> ##############################################################
  ##
  k:=3;
```

$$k := 3 \tag{11}$$

```
> L[0](k);
```

$$14 \tag{12}$$

```
> evalf(L[max](k));
```

$$6.254887503 \tag{13}$$

```
> evalf(c(k));
```

$$-0.0177407738 \tag{14}$$

```
> evalf(d(k));
```

$$0.9877783314 \tag{15}$$

```
> evalf(S[0](k,1000));
```

$$478.5286516 \tag{16}$$

```
> evalf(S[1](k)+S[2](k));
```

$$478.6959933 \tag{17}$$

```
> evalf(S[1](k)+S[3](k));
```

$$547.3052239 \tag{18}$$

```
> evalf(S[11](k)+S[3](k));
```

$$1354.242451 \tag{19}$$

```
> ##############################################################
  ##
  k:=4;
```

$$k := 4 \tag{20}$$

```
> L[0](k);
```

$$21 \tag{21}$$

```
> evalf(L[max](k));
```

$$10. \tag{22}$$

```
> evalf(c(k));
```

$$-0.005952380952 \tag{23}$$

```
> evalf(d(k));
```

$$0.9958826235 \tag{24}$$

```
> evalf(S[0](k,1000));
```

$$34880.26830 \tag{25}$$

```
> evalf(S[1](k)+S[2](k));
```

$$34880.94340 \tag{26}$$

```
> evalf(S[1](k)+S[3](k));
```

$$35102.79692 \tag{27}$$

```
> evalf(S[11](k)+S[3](k));
```

$$121867.7093 \tag{28}$$

```
> ##############################################################
##
k:=5;
```

$$k := 5 \tag{29}$$

```
> L[0](k);
```

$$30 \tag{30}$$

```
> evalf(L[max](k));
```

$$14.10964047 \tag{31}$$

```
> evalf(c(k));
```

$$-0.00593573020 \tag{32}$$

```
> evalf(d(k));
```

$$0.9958941176 \tag{33}$$

```
> evalf(S[0](k,1000));
```

$$6.624089273\ 10^{6} \tag{34}$$

```
> evalf(S[1](k)+S[2](k));
```

$$6.624089349\ 10^{6} \tag{35}$$

```
> evalf(S[1](k)+S[3](k));
```

$$6.624304519\ 10^{6} \tag{36}$$

```
> evalf(S[11](k)+S[3](k));
```

$$2.951810042\ 10^{7} \tag{37}$$

```
> ##############################################################
##
k:=16;
```

$$k := 16 \tag{38}$$

```
> L[0](k);
```

$$145 \tag{39}$$

```
> evalf(L[max](k));
```

$$72. \tag{40}$$

```
> evalf(c(k));
```

$$-0.0002155172414 \tag{41}$$

```
> evalf(d(k));
```

$$0.9998506260 \tag{42}$$

```
> evalf(S[0](k,1000));
```

$$7.040386355\ 10^{49} \tag{43}$$

```
> evalf(S[1](k)+S[2](k));
```

$$7.040386353\ 10^{49} \tag{44}$$

```
> evalf(S[1](k)+S[3](k));
```

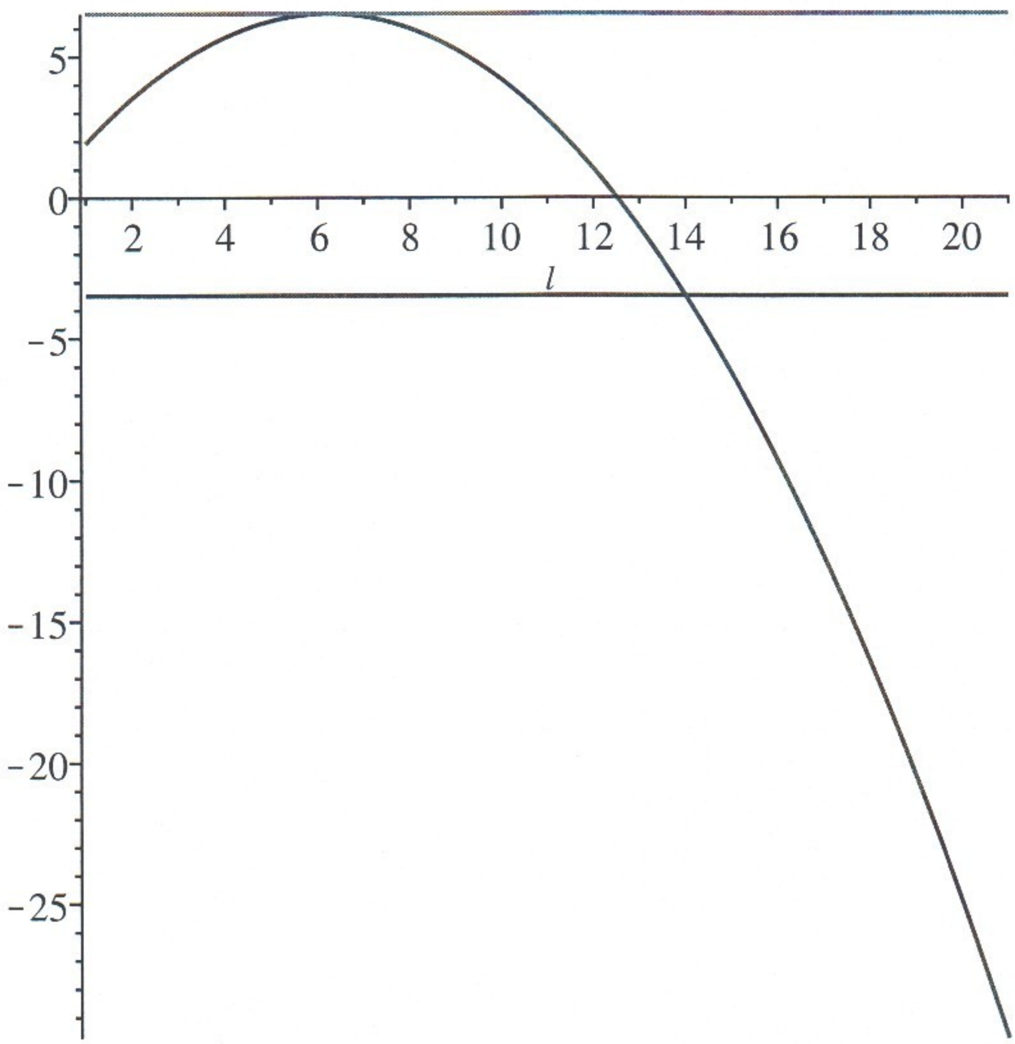
$$7.040386355\ 10^{49} \tag{45}$$

```
> evalf(S[11](k)+S[3](k));
```

$$8.476709497\ 10^{50} \tag{46}$$

```
> k:=3; plot([f(l,k),f(L[0](k),k), f(L[max](k),k)], l=1.
  .1.5*L[0](k));
```

$$k := 3$$



3. Chernoff-Schranken

10.5.17

Rand- bzw. Vorbemerkung:

- betrachte die Zufallsvariable X
- X heißt Binomialverteilt wenn gilt:

  $0 \leq X \leq n$ und

  $Prob[X=i] = \binom{n}{i} \cdot p^i (1-p)^{n-i}$

- X kann man sich z.B. so vorstellen:

  $X : \{0,1\}^n \to \mathbb{N}$ mit $X(b_1, \ldots, b_n) = \#$ Einsen

  - damit das mit der WKt. oben hinkommt, müssen die b_i vollkommen unabhängig voneinander sein!
  - also kann man X als Summe von Indikatorvariablen, die vollkommen unabh. sind schreiben

    $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ mit

    $Prob[X_i = 1] = p$ und $Prob[X_i = 0] = 1-p$

  - damit ist $E[X_1] = E[X_2] = \ldots = E[X_n] = p$ und $E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n \cdot p$

- die Unabhängigkeit brauchen wir gleich! falls die x_i abhängig sind, ist $x = \sum x_i$ nicht binomialverteilt, obwohl $E[x_i] = p$ und $E[x] = np$ sein kann.

z.B. so: Sei $Prob[X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 1] = p$
und $Prob[X_1 = \ldots = X_n = 0] = 1-p$
also totale Abhängigkeit der X_i.

Dann auch: $E[X_i] = p$ und
$E[X] = n \cdot p$

<u>Satz:</u> Sei die Zufallsvariable X binomialverteilt.
(mit n und p) ~~dann~~
Dann gilt für $0 \leq \delta \lneq 1$:

a) $$Prob\left[X \geq (1+\delta)\, E[X]\right] \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{E[X]}$$

und

b) $$Prob\left[X \leq (1-\delta)\, E[X]\right] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{E[X]}$$

und die <u>Folgerung</u> daraus:

$$Prob\left[X \geq (1+\delta)\, E[X]\right] \leq e^{-\frac{\delta^2}{3} E[X]}$$

und $$Prob\left[X \leq (1-\delta)\, E[X]\right] \leq e^{-\frac{\delta^2}{2} E[X]}$$

Beachte: $E[X] = n \cdot p$

10.5.17

Zeigen zuerst die Folgerung:

1) $$\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}} \leq e^{-\frac{\delta^2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\delta + \frac{\delta^2}{3}} \leq (1+\delta)^{1+\delta}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\delta + \frac{\delta^2}{3}} \leq e^{(1+\delta)\ln(1+\delta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta + \delta^2/3 \leq (1+\delta)\ln(1+\delta)$$

Dazu: Logarithmenreihe, für $\boxed{-1 < \delta \leq 1}$ gilt:

$$\ln(1+\delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + - \dots$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{\delta^i}{i}$$

Herleitung der Reihe mit dem Satz von Taylor kann man hier als Übung einschieben. Lasse ich jetzt weg.

(haben die Situation $0 \leq \delta \lneq 1$) ✓

Zeigen jetzt, dass gilt:

$$\delta + \frac{\delta^2}{3} \leq (1+\delta)\underbrace{\left(\delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + - \dots\right)}_{\ln(1+\delta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta + \frac{\delta^2}{3} \leq \left(\delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + - \dots\right) + \left(\delta^2 - \frac{\delta^3}{2} + \frac{\delta^4}{3} - \frac{\delta^5}{4} + - \dots\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta + \frac{\delta^2}{3} \leq \delta + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{6} + \text{Rest}$$

Da $\delta + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^2}{6} = \delta + \frac{\delta^2}{3} \leq \delta + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{6}$

gilt das, sofern Rest ≥ 0 !

Das kommt jetzt: Rest ≥ 0 10.5.17

$$Rest = \left(-\frac{\delta^4}{4} + \frac{\delta^5}{5} - \frac{\delta^6}{6} + \frac{\delta^7}{7} - + \ldots\right) +$$

$$\left(\frac{\delta^4}{3} - \frac{\delta^5}{\cancel{5}4} + \frac{\delta^6}{5} - \frac{\delta^7}{6} + - \ldots\right)$$

$$= \delta^4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \delta^5\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \delta^6\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \delta^7\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{6}\right)$$

$$+ \ldots$$

Wir betrachten die Summanden paarweise mit gerader Exponent von δ und ~~näch~~ nächster unger. Exp. von δ, also

~~$\delta^{4+5}, 6+7$, usw.~~

$\delta^4(\ldots) + \delta^5(\ldots)$, $\delta^6(\ldots) + \delta^7(\ldots)$, usw.

Allgemein sieht das dann so aus:

für $i \geq 3$, i ungerade

$$\delta^{i+1}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) + \delta^{i+2}\left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+1}\right)$$

Da $\delta < 1$ gilt:

$$\delta^{i+2}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) + \delta^{i+2}\left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+1}\right) < \text{oben}$$

aber das ist immernoch ≥ 0, damit

Rest ≥ 0 $\overset{!}{\triangledown}$

10.5.17

Damit folgt $\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}} \leq e^{-\frac{\delta^2}{3}}$.

~~Die an~~

2) Die andere Seite geht analog:

$$\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}} \leq e^{-\frac{\delta^2}{2}} \left(\leq e^{-\frac{\delta^2}{3}} \right)$$

Das ist also die „bessere" Schranke!

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\delta + \frac{\delta^2}{2}} \leq (1-\delta)^{1-\delta}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\delta + \frac{\delta^2}{2}} \leq e^{(1-\delta)\ln(1-\delta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\delta + \frac{\delta^2}{2} \leq (1-\delta)\ln(1-\delta)$$

(Wegen $-\delta$ ist die Log-reihe hier einfacher (alles negativ.)

$$\Leftrightarrow \quad -\delta + \frac{\delta^2}{2} \leq (1-\delta)\left(-\delta - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} - \dots\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\delta + \frac{\delta^2}{2} \leq \left(-\delta - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{3} - \dots\right) + \left(\delta^2 + \frac{\delta^3}{2} + \frac{\delta^4}{3} + \dots\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\delta + \frac{\delta^2}{2} \leq -\delta - \frac{\delta^2}{2} + \delta^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \delta^4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \delta^i\left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) + \dots$$

gilt, da alle $\left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) \geq 0$

■

10.5.17

Das war die Folgerung, jetzt zum Beweis des Satzes:

Zu zeigen ist 1) $Prob[X \geq (1+\delta)E[X]] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{E[X]}$

Da t^X für $t > 1$ streng monoton steigend ist, gilt:

$$Prob[X \geq (1+\delta)E[X]] = Prob[t^X \geq t^{(1+\delta)E[X]}]$$

für die Zufallsvariable t^X.

Und mit der Markov-Ungleichung ergibt sich:

$$\boxed{Prob[t^X \geq t^{(1+\delta)E[X]}] \leq \frac{E[t^X]}{t^{(1+\delta)E[X]}}}$$

Anmerkung:
$a < b$
$\Leftrightarrow f(a) < f(b)$
für f streng monoton steigend

Jetzt brauchen wir $E[t^X]$.

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, also

$t^X = t^{X_1 + X_2 + \ldots + X_n} = t^{X_1} \cdot t^{X_2} \cdot \ldots \cdot t^{X_n}$

Da die X_i vollständig unabhängig sind, ist

$E[t^{X_1} \cdot t^{X_2} \cdot \ldots \cdot t^{X_n}]$
$= E[t^{X_1}] \cdot E[t^{X_2}] \cdot \ldots \cdot E[t^{X_n}]$
$= E[t^X] = (p(t-1)+1)^n$

t^{X_i} nimmt nur die Werte $t^1 = t$ und $t^0 = 1$ an, also

$$E[t^{X_i}] = t \cdot p + 1 \cdot (1-p) = p(t-1)+1$$

10.5.17

Mit $(1+a)^{\cancel{n}} \leq e^{a}$ ~~a≥0~~ (für alle a !)

haben wir $E[t^X] \leq e^{p(t-1)\cdot n} = e^{(t-1)E[X]}$

und damit:

$$\text{Prob}\left[t^X \geq t^{(1+\delta)E[X]}\right] \leq \left(\frac{e^{(t-1)}}{t^{(1+\delta)\cancel{E}}}\right)^{E[X]}$$

mit $t = 1+\delta > 1$ ergibt sich die Behauptung.

Für 2) $\text{Prob}\left[X \leq (1-\delta)E[X]\right] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{E[X]}$

gehen wir analog vor.

$$\text{Prob}\left[X \leq (1-\delta)E[X]\right] \cancel{= \text{Prob}[t^X \leq 1-\delta)E[}$$

$$= \text{Prob}\left[t^X \leq t^{(1-\delta)E[X]}\right] \quad \text{für } t > 1$$

$$= \text{Prob}\left[t^{-X} \leq t^{-(1-\delta)E[X]}\right]$$

$$\leq \frac{E[t^{-X}]}{t^{-(1-\delta)E[X]}}$$

$$E[t^{-X}] = E\left[\left(\frac{1}{t}\right)^X\right] = E\left[\left(\frac{1}{t}\right)^{X_1+\ldots+X_n}\right]$$

$$E\left[\left(\frac{1}{t}\right)^{X_i}\right] = \frac{1}{t}\cdot p + (1-p)$$

$$= p\left(\frac{1}{t}-1\right) + 1$$

$$E[t^{-X}] = \left(p\left(\frac{1}{t}-1\right)+1\right)^n \leq e^{p\left(\frac{1}{t}-1\right)\cdot n} = e^{\left(\frac{1}{t}-1\right)E[X]}$$

Also: 10.5.17

$$\mathrm{Prob}\left[X \leq (1-\delta)\, E[X]\right] \leq \left(\frac{e^{\left(\frac{1}{t}-1\right)}}{t^{-(1-\delta)}}\right)^{E[X]}$$

Mit $t = \frac{1}{1-\delta} > 1$ ergibt sich die Behauptung.

$$\left(\frac{1}{t}-1\right) = \frac{1}{\frac{1}{1-\delta}} - 1 = 1-\delta-1 = -\delta$$

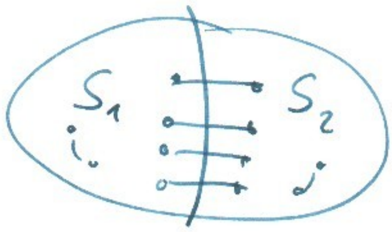
$$t^{-(1-\delta)} = \left(\frac{1}{t}\right)^{1-\delta} = (1-\delta)^{1-\delta}$$

■

Einfache Anwendung der Chernoff-Schranke

16.5.17

- Zufallsgraph mit Kantenwkt. $\frac{1}{2}$



$1, \dots, n$

$\# S_1 = \# S_2 = \frac{n}{2}$, n gerade

S_1, S_2 fest $\quad S_1 \cap S_2 = \emptyset$

Kantenkandidaten zwischen S_1 und $S_2 = \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$

$X = \#$ Kanten zwischen S_1 und S_2

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{\frac{n^2}{4}}$

$$\text{Prob}[X = k] = \binom{\frac{n^2}{4}}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2}{4} - k}$$

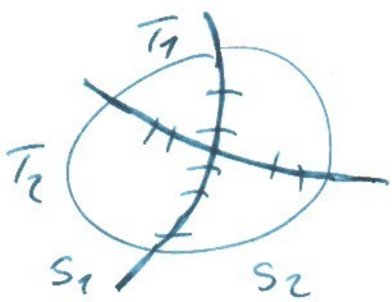
$\varepsilon > 0$, kleine Zahl

$$E[X] = \frac{n^2}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}[X \geq (1+\varepsilon) E[X]] \leq e^{-\frac{1}{3}\varepsilon^2 E[X]} = e^{-\frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon^2 n^2}{4} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= e^{-\underbrace{\frac{1}{24}}_{\Omega(1)} \varepsilon^2 n^2}$$

(S_1, S_2 fest!)
aber beliebig



$X = \#$ Kanten zw. S_1, S_2

$Y = \#$ Kanten zw. T_1, T_2

$$A = \{ G \; ; \; X(G) \geq (1+\varepsilon) E[X] \text{ oder } Y(G) \geq (1+\varepsilon) E[Y] \}$$

$E[X] = E[Y]$

16.5.17

$$\text{Prob}[A] \leq \text{Prob}[X \geq (1+\varepsilon)E[X]]$$
$$+ \text{Prob}[Y \geq (1+\varepsilon)E[Y]]$$
$$\leq 2 \cdot e^{-\frac{1}{24}\varepsilon^2 n^2} \to 0$$

Alle Schnitte?

- Maximal 2^n solche Einteilungen, dann Schranke:

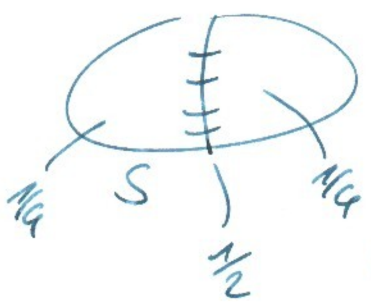
$$\text{Prob}[\,] \leq 2^n \cdot e^{-\frac{1}{24}\cdot\varepsilon^2 n^2} = e^{(n\cdot\ln 2) - \frac{1}{24}\varepsilon^2 n^2}$$
$$= e^{n((\ln 2) - \frac{1}{24}\varepsilon^2 n)} \to \underline{\underline{0}}$$

- Zufallsgraph wie oben

$\#S = \frac{n}{2}$ $\quad X = \#$Kanten innerhalb von S

Kantenkandidaten: $\dfrac{\frac{n}{2}\cdot(\frac{n}{2}-1)}{2} = \binom{\frac{n}{2}}{2}$

$$E[X] = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{8} - \frac{n}{4}\right) \qquad = \frac{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}}{2} - \frac{\frac{n}{2}}{2} = \frac{n^2}{8} - \frac{n}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{8}\cdot(1 - o(1)) \qquad = \frac{n^2}{8}(1-o(1))$$



der Kanten

16.5.17

$$\mathrm{Prob}\left[X \geq (1+\varepsilon)\, E[X]\right] \leq e^{-\frac{1}{3}\varepsilon^2 \frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{8} - \frac{n}{4}\right)}$$

$$= e^{-\frac{1}{48}\varepsilon^2 n^2 + \frac{1}{12}\varepsilon^2 n}$$

$$\leq e^{-\frac{1}{50}\varepsilon^2 n^2} \quad \text{für } n \text{ groß genug}$$

- Abweichung für irgendeine Menge

$$\leq 2^n \cdot e^{-\frac{1}{50}\varepsilon^2 n^2} \to \emptyset$$

16.5.17

4. Graphfärbung, 2. Teil

Greedy Algorithmus: Knoten 1 mit Farbe 1

Knoten 2 mit kleinstmöglicher Farbe

⋮

Knoten n mit kleinstmöglicher Farbe

(mit n Farben geht das immer)

· Chromatische Zahl: $\chi(G)$ = minimale # Farben für G

$$\chi(G) \leq \chi_{gr}(G) = \text{\# Farben des Algorithmus.}$$

Satz: Kantenwkt. $\frac{1}{2}$

(a) $\mathrm{Prob}\left[\chi_{gr} \leq \frac{n}{2\log_2 n}\right] \leq n^{-\log_2 n} = 2^{-(\log_2 n)}$

(b) $\mathrm{Prob}\left[\chi_{gr} \geq \frac{2n}{\log_2 n}\right] \leq e^{-\Omega(\sqrt{n})}$

Beweis von (a): · Farben möglich $1, \ldots, n$

Für jede Farbe l ist

mit Wkt. hinreichend schnell gegen 1?

$$\text{\# Knoten mit Farbe } l \leq 2 \cdot \log_2 n$$
(beim Greedy Algo)

$$n = \underbrace{(\text{\# Knoten mit } 1)}_{\leq 2 \cdot \log_2 n} + (\text{\# Knoten mit } 2) + \ldots + (\text{\# Knoten mit } n)$$

$$n \leq (2 \cdot \log_2 n) \cdot m$$

$\hookrightarrow m$ = # Farben, die es tun.

$$m \geq \cancel{\frac{2\log_2 n}{n}} \frac{n}{2\log_2 n}$$

16.5.17

Algorithmus

1

2

3

$\vdots$

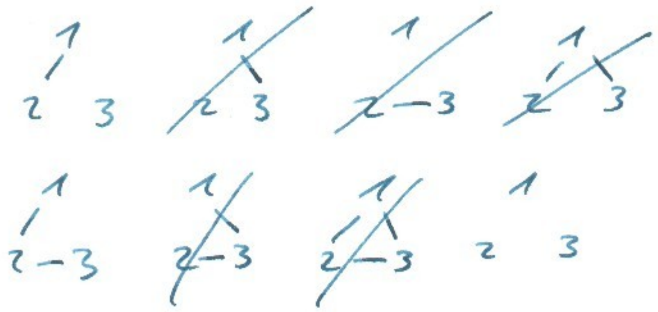
n

$\mathrm{Prob}[\text{Knoten } 2 \text{ bekommt Farbe } 1] = \frac{1}{2}$

Kante $\{1,2\}$ nicht dabei

$\mathrm{Prob}[\text{Knoten } 3 \text{ bekommt Farbe } 1]$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$



$\cancel{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}$

$\mathrm{Prob}[\text{Knoten } i \text{ ist der m'te mit Farbe } 1] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$

fest.

m-1 mit Farbe 1

(m-1 Kanten nicht da)

16.5.17

Knoten i ist fest!

Annahme: · Knoten $i_1 < i_2 < \ldots < i_{m-1} < i$

und i_j haben alle Farbe 1

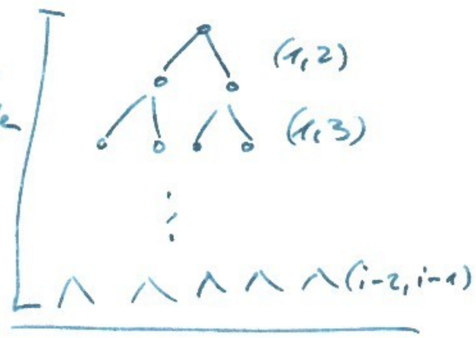
· Unter dieser Annahme ist WKt.

i hat Farbe $1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$

Betrachten Teil des Graphen auf Knoten $\{1, \ldots, i-1\}$.

Betrachte jetzt das Ereignis wo

$\{i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}\}$ alle Knoten $< i$ sind mit Farbe 1.



Bsp: A = Ereignis in der

Menge der Graphe, wo alle Kanten

auf Knoten $1, \ldots, i-1$ da sind.

$\cancel{\text{Prob}[A] = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{i-1}{2}} \cdot \sum_{G}}$

~~im Gesamtraum~~

$\text{Prob}[A \mid \text{Alle Kanten auf } 1, \ldots, i-1 \text{ sind da}]$

Gesamtraum

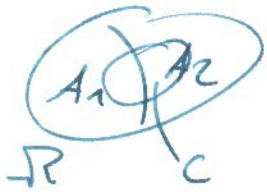
$$= \frac{\text{Prob}[A]}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{i-1}{2}}} = \text{Prob}[A]$$

Restraum (Restbaum)

$$\text{Prob}[A \mid B] = \frac{\text{Prob}[A \cap B]}{\text{Prob}[B]}$$

16.5.17

Formel von der Totalen Wahrscheinlichkeit



$\mathrm{Prob}[C] = \cancel{\mathrm{Prob}[A_1}$

$\mathrm{Prob}_\Omega[A_1] \cdot \mathrm{Prob}[C \mid A_1] +$

$\mathrm{Prob}_\Omega[A_2] \cdot \mathrm{Prob}[C \mid A_2]$

$\cancel{A_1 \cap ?}\ A_1 \cap A_2 = \emptyset$

23.5.17

(a) $\text{Prob}\left[\chi_g \leq \frac{1}{2} \frac{n}{\log_2 n} \right] \leq n^{-\log_2 n}$

Beweis: Knoten 1

⋮ wird gefärbt.

Knoten i

⤷ Farbe hängt von Knoten $1, \dots, i-1$ ab

Die Färbung der Knoten $1, \dots, i-1$ ergibt sich aus dem Teilgraph auf $1, \dots, i-1$, d.h. alle Kanten $\{x, y\}$ $1 \leq x, y \leq i-1$.

Zeigen für jede Farbe ℓ, $1 \leq \ell \leq n$:

$(\#\text{Knoten mit Farbe } \ell) < 2 \cdot \log_2 n$

mit entsprechend hoher Wahrscheinlichkeit.

$C_\ell(G) = \{ i \mid 1 \leq i \leq n$, Knoten i bekommt Farbe ℓ vom Algorithmus auf $G \}$

$|C_\ell| = \# C_\ell$

$\text{Prob}[\# C_\ell > 2 \cdot \log n] \to 0$

Ziel

~~23.5.17~~
23.5.17

Baum (Generierung des Graphen)

Für Farbe l und Zahl ~~n~~ m

Prob[Farbe l kommt mindestens m-mal vor]

$= \text{Prob}[\#G_l \geq m]$

= Prob[es gibt einen Knoten i, der der m-te mit Farbe l ist]

$\Downarrow$ Zuerst Knoten i fest, Farbe l fest.

Prob[Knoten i ~~bekommt~~ m-ter mit Farbe Farbe l]:

Lauf d. Algo.
Knoten 1
1. Knoten 2 l
2. ⋮ l
m. ⋮
Knoten n l

$\geq m$ mal

Sei K ein Graph auf $\{1, \dots, i-1\}$. Greedy hat K gefärbt.

1. Fall: In der Färbung von K kommt die Farbe l $\leq (m-2)$ ~~mal~~ mal vor. Dann ~~wird~~ ist i nicht der m-te.

2. Fall: Farbe l kommt $\geq m$-mal in K vor, dann ist i nicht der m-te.

3. Fall: Farbe l kommt genau $(m-1)$-mal in K vor.

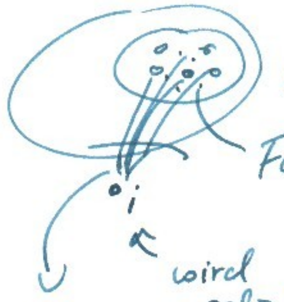
23.5.17

Situation im Fall 3:

$\underbrace{\text{Prob[i ist m-ter mit Farbe L]}}$

Ereignis A

Teilmenge von Graphen



K

Farbe L, genau $m-1$ Stück

wird gefärbt.

Diese $m-1$ Kanten nicht dabei.

Weitere Kanten dabei, die Farbe L sicherstellen.

Wahrscheinlichkeiten ausrechnen:

1. Fall: Die Wahrscheinlichkeit ist 0.

Ist K ein fester Graph gemäß dem Fall 1.

$$\text{Prob}[A \mid K] = 0$$

Alle Graphen, so dass auf $\{1, \dots, i-1\}$ K liegt

Warum ist das so?

$$\frac{\text{Prob}[A \cap K]}{\text{Prob}[K]} = \text{Prob}[A \mid K]$$

$$A \cap K = \emptyset$$

2. Fall: analog zum 1. Fall

$$\text{Prob}[A \mid K] = \frac{\text{Prob}[A \cap K]}{\text{Prob}[K]} = 0$$

23.5.17

3. Fall: K fest, wie gehabt.

$$\mathrm{Prob}[A \mid K] \le \left(\tfrac{1}{2}\right)^{m-1}$$

da nicht alle Kanten beachtet.

Mit der definition!

$$\frac{\mathrm{Prob}[A \cap K]}{\mathrm{Prob}[K]} \qquad \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{i-1}{2}} \qquad \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{i-1}{2}}$$

Wkeit für Kanten bzw. nicht-Kanten in K

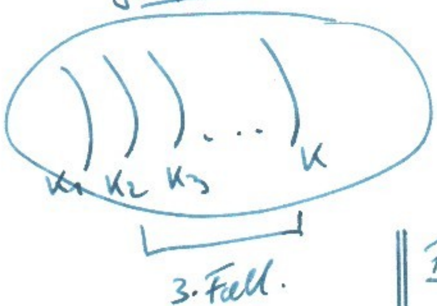
- W'keit für den Rest. $\left(\le \left(\tfrac{1}{2}\right)^{m-1}\right.$

Gesamtbild:

$$\mathrm{Prob}[\underbrace{i \text{ ist } m\text{-ter mit Farbe } l}_{=:A}]$$

~~$= \emptyset$ K nach Fall 1~~

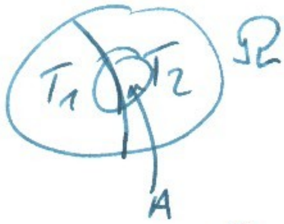
Graphen



$$\boxed{A = \Big(\bigcup_{K \text{ nach Fall 1}} \overbrace{(A \cap K)}^{=\emptyset}\Big) \cup \Big(\bigcup_{K \text{ nach Fall 2}} \overbrace{(A \cap K)}^{=\emptyset}\Big) \cup \bigcup_{K \text{ nach Fall 3}} (A \cap K)}$$

Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

(ganz allgemein)



$T_1 \cap T_2 = \emptyset$

$T_1 \cup T_2 = \Omega$

$$\mathrm{Prob}[A] = \mathrm{Prob}[A \mid T_1] \cdot \mathrm{Prob}[T_1] + \mathrm{Prob}[A \mid T_2] \cdot \mathrm{Prob}[T_2]$$

$$= \mathrm{Prob}[A \cap T_1] + \mathrm{Prob}[A \cap T_2]$$

23.5.17

$$\text{Prob}[A] = \sum_{\substack{K \text{ nach} \\ \text{Fall } 3}} \text{Prob}[K] \cdot \underbrace{\text{Prob}[A|K]}_{\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \text{ für jedes } K!}$$

$$\leq \text{Prob}[A|K] \cdot \underbrace{\sum_{K \text{ nach } 3} \text{Prob}[K]}_{\leq 1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$$

$\Rightarrow$ Für i fester Knoten, l feste Farbe

$$\text{Prob}[i \text{ ist } m\text{-ter mit Farbe } l] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$$

Prob[Es gibt einen Knoten, der m-ter mit Farbe l]

$= \text{Prob}[(1 \text{ ist } m\text{-ter}) \text{ od. } (2 \text{ ist } m\text{-ter}) \text{ od.} \ldots \text{ od } (n \text{ ist } m\text{-ter})]$

$= \text{Prob}[1 \text{ ist } m\text{-ter}] + \ldots + \text{Prob}[n \text{ ist } m\text{-ter}]$

$\leq \underline{n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}$

- Grenze an die # Knoten mit gleicher Farbe.

$m = 2(\log n)$

dann $n \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\log n} = 2 \cdot \frac{1}{n}$

- Die Farbe l kommt $\geq 2 \cdot (\log n)$ mal nur mit Wahrscheinlichkeit $\leq 2 \cdot \frac{1}{n} \to 0$ vor.

Sei $k = \lceil \log_2 n \rceil$, dann betrachten wir das Ereignis 23.5.17

$$\underbrace{A}_{\text{Farbe}}{}_{l,\underbrace{j_1,j_2,\dots,j_k}_{\text{ansteigende Knoten}}} = \text{Ereignis, dass}$$

j_1 ist $(k+1)$-ter mit Farbe l

j_2 ist $(k+2)$-ter ...

|

j_k ist $(\underbrace{k+k}_{2k})$-ter mit Farbe l.

$$\text{Prob}[A_{l,j_1}] \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \qquad \text{Prob}[A_{l,j_1,j_2}] \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$\text{Prob}[A_{l,j_1,\dots,j_k}] \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1} \cdots \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2k-1}\right)$$

<u>Wieso darf man multiplizieren?</u>

$$A_{l,j_1,j_2} = (j_1 \text{ ist } (k+1)\text{ter mit Farbe } l)$$

$$\cap (j_2 \text{ ist } (k+2)\text{ter mit Farbe } l)$$

$$\left(\text{Prob}[A \cap B] = \underbrace{\text{Prob}[A]}_{\leq \left(\frac{1}{2}\right)^k} \cdot \underbrace{\text{Prob}[B \mid A]}_{\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}\right) \text{ wie oben.}$$

$$A_{l,j_1,\dots,j_k} = A^{k+1}_{l,j_1} \cap A^{k+2}_{l,j_2} \cap \dots \cap A^{k+k}_{l,j_k}$$

$$\text{Prob}[A_{l,j_1,\dots,j_k}] = \text{Prob}[A^{k+1}_{l,j_1}] \cdot \text{Prob}[A^{k+2}_{l,j_2} \cap \dots \cap A^{k+k}_{l,j_k} \mid A^{k+1}_{l,j_1}]$$

$$= \text{Prob}[A_{l,j_1}] \cdot \text{Prob}[A^{k+2}_{l,j_2} \mid A_{l,j_1}] \cdot \text{Prob}[A^{k+3}_{l,j_3} \cap \dots \cap A^{k+k}_{l,j_k} \mid A^{k+1}_{l,j_1} \cap A^{k+2}_{l,j_2}]$$

23.5.17

$\text{Prob}[A \cap B \cap C]$

$= \text{Prob}[A] \cdot \text{Prob}[B \cap C \mid A]$

$\text{Prob}[B \cap C \mid A] = \text{Prob}[B \mid A] \cdot \text{Prob}[C \mid A \cap B]$ #

$\frac{B \cap A}{A}$ $\qquad$ $\frac{C \cap \cancel{A \cap B}}{\cancel{A \cap B}}$

24.5.17

Hatten gezeigt:

Prob[$\exists$ Knoten i, der der m-te mit Farbe ℓ ist]

$\leq n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$

$m = 2\log_2 n$ Feste Farbe

$= \cancel{2n \cdot \left(\frac{1}{2n}\right)^2}\ 2n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow$ Prob[Farbe ℓ kommt $\geq m$-mal vor]

Für Farbe ℓ gilt Prob[Farbe ℓ kommt $\geq m$-mal vor]

$\leq n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$

Prob[Es gibt Farbe ℓ, die $\geq m$-mal vorkommt] $\leq n \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$

$\left(\text{Prob}[A \cup B] \leq \text{Prob}[A] + \text{Prob}[B]\right)$

Setze $m = 3\log_2 n$

$\hookrightarrow$

$\leq n \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3\log_2 n - 1}$

$2 \cdot n^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 \to 0$

$\Rightarrow$ Keine Farbe $\geq 3\log_2 n$ mal,
also mindestens $\frac{n}{3\log_2 n}$ verschiedene Farben!

<u>Ziel:</u> $\leq \lceil 2 \log_2 n \rceil$ Häufigkeit für jede Farbe 24.5.17

Farbe l fest. $K = \lceil \log_2 n \rceil$.

$\vdots \;]$ K mal Farbe l

j_1: $(K+1)$. mal $\rightarrow Prob[\;] = \left(\frac{1}{2}\right)^K$

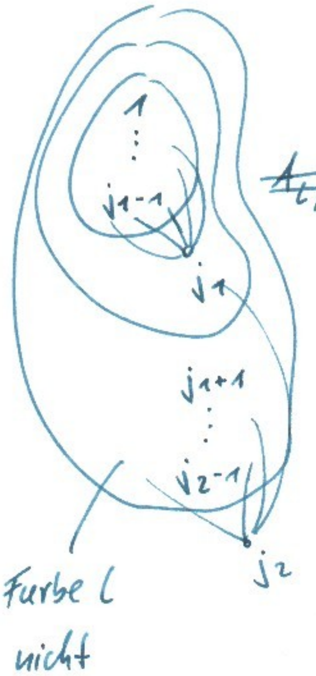
j_2: $(K+2)$. mal $\rightarrow Prob[\;] = \left(\frac{1}{2}\right)^{K+1}$

$\vdots$

j_K: $2K$-tes mal $\rightarrow Prob[\;] = \left(\frac{1}{2}\right)^{2K-1}$

$\underbrace{A_{l, j_1, j_2, \ldots, j_K}}_{\text{fest}}$ = Knoten j_1 erhält Farbe l als $(K+1)$-ter;
Knoten j_2 " $(K+2)$-ter;
...
$(j_1 < j_2 < \ldots < j_K)$ | Knoten j_K erhält Farbe l als $2K$-ter

$$Prob[A_{l, j_1, \ldots, j_K}] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{K+1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2K-1}$$



$\cancel{A_{l,j_1} =}$ $Prob[A_{l,j_1}] = \left(\frac{1}{2}\right)^{K\cancel{+1}}$

$Prob[j_2$ als $(K+\cancel{1}2)$ter mit $l] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{K+1}$

usw.

24.5.17

Versuch mit der Schnittformel:

$$\mathrm{Prob}[A \cap B] = \mathrm{Prob}[A \mid B] \cdot \mathrm{Prob}[B]$$

$$\mathrm{Prob}[A \cap B \cap C] = \mathrm{Prob}[A \cap B \mid C] \cdot \mathrm{Prob}[C]$$

$$\mathrm{Prob}[A \cap B \mid C] = \mathrm{Prob}[A \mid B \cap C] \cdot \mathrm{Prob}[B \mid C]$$

$$\mathrm{Prob}[A \cap B \cap C] = \mathrm{Prob}[A \mid B \cap C] \cdot \mathrm{Prob}[B \mid C] \cdot \mathrm{Prob}[C]$$

$$A_{l,j_1,\dots,j_k} = A_{l,j_1}^{k+1} \cap A_{l,j_2}^{k+2} \cap A_{l,j_3}^{k+3} \cap \dots \cap A_{l,j_k}^{\overbrace{k+k}^{2k}}$$

$$\mathrm{Prob}[A_{l,j_1,\dots,j_k}] = \mathrm{Prob}[A_{l,j_1}^{k+1}] \cdot \cancel{\mathrm{Prob}[A_{l,j_2,\dots,}^{k} A_{l,j_k}^{k+2}}$$

$$\cdot \underbrace{\mathrm{Prob}[A_{l,j_2}^{k+2} \cap \dots \cap A_{l,j_k}^{k+k} \mid A_{l,j_1}^{k+1}]}$$

$$= \mathrm{Prob}[A_{l,j_3}^{k+3} \cap \dots A_{l,j_k} \mid A_{l,j_1}^{k+1} \cap A_{l,j_2}^{k+2}]$$

$$\cdot \mathrm{Prob}[A_{l,j_2}^{k+2} \mid A_{l,j_1}^{k+1}]$$

Wahrscheinlichkeit wird zu:

$$\mathrm{Prob}[A_{l,j_1}^{k+1}] \cdot \mathrm{Prob}[A_{l,j_2}^{k+2} \mid A_{l,j_1}^{k+1}] \cdot \mathrm{Prob}[A_{l,j_3}^{k+3} \mid A_{l,j_1}^{k+1} \cap A_{l,j_2}^{k+2}]$$

$$\cdot \dots \cdot \mathrm{Prob}[A_{l,j_k} \mid A_{l,j_1}^{k+1} \cap \dots \cap A_{l,j_k}^{k+k}]$$

24.5.17

$$\mathrm{Prob}[A_{l,j_1,\dots,j_k}] \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+\dots+2k-1}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k^2+0+\dots+(k-1)}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k^2+\binom{k}{2}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k^2-\frac{k}{2}}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{2k+k^2-k}{2}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{k+k^2}{2}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{k+1}{2}}$$

C_l = Knoten mit Farbe l

$\#C_l$ ist ZV $\quad \mathrm{Prob}[\#C_l > 2k] \leq \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Wahl von } j_1,\dots,j_k} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{k+1}{2}}$

$$\binom{n}{k} \leq n^k$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{(k+1)k}{2}} = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{k^2}{2}}} \cdot \overbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}^{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\log n \cdot \log n}$$

$$= (n)^{-\frac{1}{2}\log n}$$

$$\underbrace{\binom{n}{k}} \cdot \left(\tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \leq n^{\log_2 n - \frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\frac{n \cdot e}{\log n}\right)^{\log n}$$

24.5.17

$$\text{Prob}[\#C_l \geq 2k] \leq \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k^2 + \binom{k}{2}}$$

$$\leq n^{\log_2 n} \cdot n^{-\log_2 n} \cdot n^{-\frac{1}{2}(\log n - 1)}$$

$$= n^{-\Omega(\log_2 n)}$$

$\Downarrow$

$$\text{Prob}[\text{Farbe } l \text{ kommt} \geq 2\log_2 n \text{ mal vor}] = n^{-\Omega(\log_2 n)}$$

$$\text{Prob}[\exists \text{ Farbe, die} \geq 2\log_2 n \text{ mal auftritt}]$$

$$\leq n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\Omega(\log_2 n)}$$

$$= n^{-\Omega(\log_2 n)+1}$$

$$= n^{-\Omega(\log_2 n)}$$

D.h.: # Farben ~~ist~~ $\geq \frac{n}{2\log_2 n}$ mit Wkt.

$1 - n^{-\Omega(\log_2 n)}$

Es gilt: (zeigen wir vielleicht später)

Graph ist mit $\boxed{\frac{n}{2\log n} \cdot (1 \pm o(1))}$ Farben färbbar, aber nicht weniger.

24.5.17

Beweis von (b):

$$\mathrm{Prob}\left[\chi_g \geq \frac{2n}{\log_2 n}\right] \leq e^{-\Omega(\sqrt{n})} \ll n^{-\Omega(\log_2 n)}$$

d.h. $\frac{n}{2\log_2 n} \leq \chi_g \leq \frac{2n}{\log_2 n}$

A_j^k = ~~Mindestens~~ genau ~~Mehr als k, d.h. ≥~~ Farben $\{1,\dots,k\}$ auf Knoten $\{1,\dots,j\}$

A_n^k ist $\chi_g \geq k$

B_j^k = Knoten j bekommt Farbe k

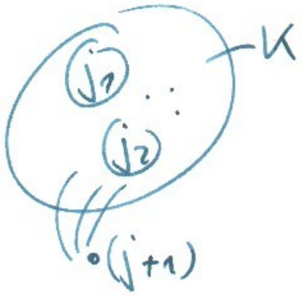
$$B_{j+1}^{k+1} \subseteq A_j^k \subseteq A_{j+1}^k \subseteq \dots \subseteq A_n^k$$

$\mathrm{Prob}\left[B_{j+1}^{k+1} \mid A_j^k\right] \leq$

Farben $\{1,\dots,k,\dots\}$

an jede Farbe $1,\dots,k$ muß mind. 1 Kante sein; keine an Farbe $k+1$

Nehmen festen Graphen K auf $\{1,\dots,j\}$ mit A_j^k



$\boxed{j_1+j_2+\dots+j_k=j}$

$j_1 = \#$ Farbe 1

$\vdots$

$$\mathrm{Wkt} \leq \left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{j_1}\right)\cdot\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{j_2}\right)\cdot \dots \cdot\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{j_k}\right) \leq \left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{j/k}\right)\cdot\dots$$

alle gleich

$$\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{j/k}$$

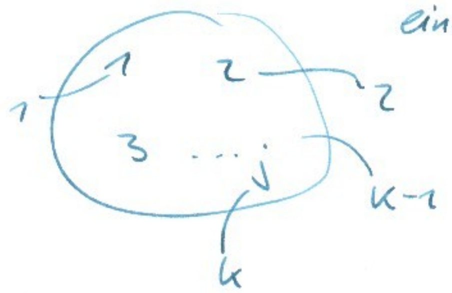
Keine Kanten in die Menge mit Farbe l.

30.5.17

Ziel: $\text{Prob}\left[\chi_g \geq \frac{2n}{\log_2 n}\right] \leq \exp\left(-\Omega(\sqrt{n})\right)$

A_j^k = Ereignis, dass genau Farben $\underbrace{1,\dots,k}$ bei Knoten $1,\dots,j$

jede Farbe mind. einmal.



(z.B. A_1^1 = alle Graphen)

K_j = irgendein Graph (fest) auf ~~dem~~ Knoten $1,\dots,j$ bei dem der greedy Algorithmus genau Farben $1,\dots,k$ braucht.

$\text{Prob}\left[G;\ j+1 \text{ erhält Farbe } k+1 \mid G \supseteq K_j\right]$

$\leq \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j_1}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j_2}\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j_k}\right)$

mind. eine Kante in jede Farbe hinein.

(• wobei j_i = # Knoten mit Farbe i in K_j

• $j_1+j_2+\dots+j_k = j$)

$\leq \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j/k}\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j/k}\right)$

$\leq e^{\cancel{1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{j/k}\cdot k} = \dfrac{1}{e^{\left(\frac{1}{2}\right)^{j/k}\cdot k}} =: p_{j,k}$

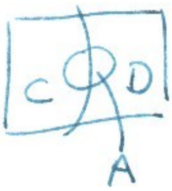
30.5.17

Dann gilt:

$$\mathrm{Prob}[\, G \,;\, j+1 \text{ hat Farbe } k+1 \mid A_j^k\,] \leq p_{jk}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{mit totaler WKt.} \\ A_j^k \text{ zerlegen in versch. } K_j\end{array}\right)$$

Formel der totalen WKt:



$$\mathrm{Prob}[A] = \mathrm{Prob}[C] \cdot \mathrm{Prob}[A \mid C] + \mathrm{Prob}[D] \cdot \mathrm{Prob}[A \mid D]$$

$$= \mathrm{Prob}[A \cap C] + \mathrm{Prob}[A \cap D]$$

$$\cancel{A_j^k = \{ G_b \mid \text{Es gibt ein } K_j \text{ mit } G \supseteq K_j \}}$$

$$\cancel{A_j^k = \{ G \mid G \supseteq K_j^{(1)} \} \,\dot\cup\, G \mid G \supseteq K_j^{(2)} \} \,\dot\cup \ldots}$$

Ereignis: A_n^k = Graphen, die mit Farben $1, \ldots, k$ gefärbt werden.
(alles)

$\cancel{\mathrm{Prob}[A_n^{k+1}]}$ $\quad B_{j+1}^{k+1} :=$ $j+1$ hat Farbe $k+1$ das erste mal

Irgendwann Farbe k+1

$$\mathrm{Prob}[A_n^{k+1}] \leq \underbrace{\mathrm{Prob}[B_{k+1}^{k+1}] + \mathrm{Prob}[B_{k+2}^{k+1}] + \ldots + \mathrm{Prob}[B_n^{k+1}]}$$

#Farben $\geq k+1$

Farben $\supseteq \{1, \ldots, k, k+1\}$

30.5.17

$$B_{k+1}^{k+1} = B_{k+1}^{k+1} \cap A_k^k$$

$$B_{k+j+1}^{k+1} = B_{k+j+1}^{k+1} \cap A_{k+j}^k$$

<u>damit:</u>

$$Prob[A_n^{k+1}] \leq Prob[B_{k+1}^{k+1} \mid A_k^k]$$

$$+ Prob[B_{k+2}^{k+1} \mid A_{k+1}^k]$$

$$+ \dots$$

$$+ Prob[B_n^{k+1} \mid A_{n-1}^k]$$

$$\leq p_{k,k} + p_{k+1,k} + \dots + p_{n-1,k} \qquad ?$$

<u>nochmal neu</u> !

30.5.17

5. Hamilton Kreis

Zufallsgraph hat Hamiltonkreis, in Polynomialzeit zu finden mit Wahrscheinlichkeit gegen 1.

Definition: G ist tracktable genau dann, wenn (1), (2), (3) gelten: $N(v)$ = Menge der Nachbarn von v.

(1) $\frac{n}{2} - \frac{n}{50} \leq N(v) \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{50}$ für alle v

(2) $\frac{3n}{4} - \frac{n}{50} \leq N(u) \cup N(v) \leq \frac{3n}{4} + \frac{n}{50}$ für $u \neq v$

(3) $\frac{7}{8}n - \frac{n}{50} \leq N(u) \cup N(v) \cup N(w) \leq \frac{7}{8}n + \frac{n}{50}$

f. $u \neq v$, $u \neq w$, $v \neq w$
(alle verschieden)

zu (2): 

$\frac{n}{2}$ Nachbarn, $\approx \frac{n}{4}$ gemeinsame, $\frac{n}{2}$ Nachb.

d.h. $\frac{n}{2} - \frac{n}{4}$ neue Nachbarn von V.

zu (3): 

Satz: Zufallsgraph hat mit Wahrscheinlichkeit $\to 1$ tracktable. (Eigenschaft)

30.5.17

Beweis: (1) v fest $v=1$

$$E[\#N(1)] = \frac{1}{2}(n-1)$$

$$\#N(v) = X_1 + \ldots + X_{n-1}$$

0,1-wertig, unabhängig.

$$\text{Prob}[\#N(v) \geq (1+\varepsilon)\, E[\#N(v)]] \leq e^{-\frac{1}{3}\varepsilon^2 E[\#N(v)]}$$

(Chernoff)

In unserem Falle:

$$e^{-\frac{\varepsilon^2}{3}\cdot\frac{n-1}{2}} \qquad \frac{n}{2} + \frac{n}{50} = \frac{n}{2}\left(1 + \frac{1}{25}\right)$$

$$\geq \frac{n-1}{2}\underbrace{\left(1 + \frac{2}{25}\right)}_{\varepsilon}$$

$$e^{-\Omega(n)}$$

Prob[Es gibt einen Knoten v mit

$$\#N(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{50}] \leq n \cdot e^{-\Omega(n)} \to 0$$

7.6.17

Ziel: In Zufallsgraph Hamiltonkreis in Poly.-Zeit zu konstruieren (mit WKt. $\to 1$)

Definition: Graph mit n Knoten ist tractable gdw.

(i) $\frac{n}{2} - \frac{n}{50} \leq |N(v)| \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{50}$

für alle v

$N(v)$ = Menge der Nachbarn von v

$\#N(v) = |N(v)|$ ist ZV

$E[\#N(v)] = \frac{n-1}{2}$

Im Zufallsgraph gilt (i) mit hoher W-keit.
(mit Chernoff Schranken)
Erstmal festes v.

$$\#N(v) = X_1 + \ldots + X_{n-1}$$

$n-1$ Kandidaten f. Nachbarn

$X_i = 1 \iff$ Kante zum i-ten Nachbarn vorhanden, ($X_i = 0$ sonst)

$$\mathrm{Prob}[\#N(v) = k] = \binom{n-1}{k} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1-k} = \binom{n-1}{k}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$E[\#N(v)] = \tfrac{1}{2}(n-1)$$

Chernoff-Schranke: $\mathrm{Prob}[\#N(v) \geq E[\#N(v)](1+\varepsilon)]$

$$\leq \exp\left(-\tfrac{1}{3}\cdot\varepsilon^2 \cdot E[\#N(v)]\right)$$

7.6.17

$\Rightarrow$ passendes ε bestimmen. Mit $\varepsilon = \frac{1}{25}$

gilt: $E[\#N(v)](1+\varepsilon) \le \frac{n}{2} + \frac{n}{50}$.

Also: $\text{Prob}[\#N(v) \ge \frac{n}{2} + \frac{n}{50}] \le \text{Prob}[\#N(v) \ge E[\#N(v)](1+\varepsilon)]$

Mit der Chernoff-Schranke haben wir jetzt:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Prob}[\#N(v) \ge \tfrac{n}{2} + \tfrac{n}{50}] &\le \exp\left(-\tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{25}\right)^2 \cdot \tfrac{n-1}{2}\right) \\ (v \text{ fest !}) \quad &= \exp(-\Omega(n)) \end{aligned}}$$

aber beliebig

$\text{Prob}[\text{Es gibt ein } v \text{ mit } \#N(v) \ge \frac{n}{2} + \frac{n}{50}]$

$\le \underbrace{\text{Prob}[\#N(v_1) \ge \ldots] + \text{Prob}[\#N(v_2) \ge \ldots] + \ldots + \text{Prob}[\#N(v_n) \ge \ldots]}_{n \text{ Summanden.}}$

$= n \cdot e^{-\Omega(n)} \le e^{-\underbrace{\Omega(n)}_{\text{kleinere Konst.}}}$

Die andere Seite geht analog:

$\text{Prob}[\#N(v) \le \frac{n}{2} - \frac{n}{50}] \le \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^2 E[\#N(v)]\right)$

$\left(\begin{aligned} \text{zusammen: } \text{Prob}\big[\,|\#N(v) - E[\#N(v)]| \ge \varepsilon E[\#N(v)]\big] \\ \le 2 \cdot \exp\left(-\tfrac{1}{3}\varepsilon^2 E[\#N(v)]\right) \end{aligned}\right)$

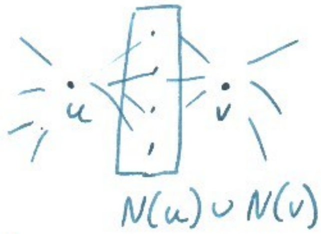
$= \exp(-\Omega(n))$

7.6.17

weiter in der Definition:

(ii) $\#\big(N(u) \cup N(v)\big)$ für alle $u \neq v$.

$\frac{3}{4}n + \frac{n}{50} \leq \quad \leq \frac{3}{4}n + \frac{n}{50}$



$\#[N(u) \cup N(v)]$

$= X_1 + \ldots + X_{n-2} + Z$

$X_i = 1 \Leftrightarrow$ i-ter Kandidat in $N(u) \cup N(v)$

0 sonst

$Z = 2 \Leftrightarrow u$ ist Nachbar von v

mit Wkt. $\frac{1}{2}$

$\mathrm{Prob}[X_i = 1] = \frac{1}{4}$

Für $w \neq u$, $w \neq v$ ist $\mathrm{Prob}[w \in (N(u) \cup N(v))] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Für festes $u \neq v$:

$$\mathrm{Prob}\left[\#(N(u) \cup N(v)) \geq \frac{3}{4}n + \frac{n}{50}\right] \leq \exp(-\Omega(n))$$

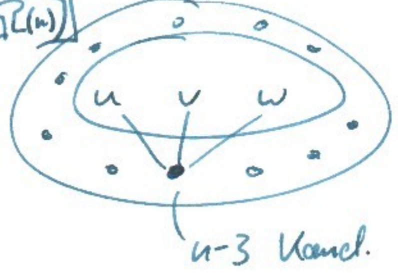
Gesamtwahrscheinlichkeit f. beliebiges u, v

$$\mathrm{Prob}[\exists u, v \text{ mit} \ldots] \leq n^2 \cdot \exp(-\Omega(n)) = \exp(-\Omega(n))$$

(iii) $\frac{7}{8}n - \frac{n}{50} \leq \#\big(N(u) \cup N(v) \cup N(w)\big) \leq \frac{7}{8}n + \frac{n}{50}$

für alle u, v, w

$\mathrm{Prob}[\ldots] \leq n^3 \cdot \exp(-\Omega(n))$



$E[\,] = \frac{n-3}{8} \cdot 7$

$+ \frac{1}{4} \cdot 3$

$+ \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2$

7.6.17

Haben gezeigt:

$$\text{Prob}[\text{(i) gilt nicht}] \leq \exp(-\Omega(n))$$
$$\text{Prob}[\text{(ii) gilt nicht}] \leq \text{— " —}$$
$$\text{Prob}[\text{(iii) gilt nicht}] \leq \text{— " —}$$

Wkt, dass (i) od. (ii) od. (iii) nicht gilt ist

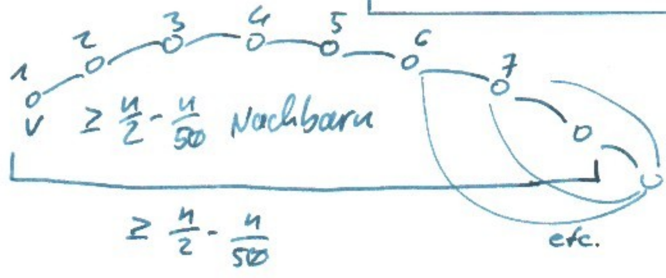
$$\leq 3 \cdot \exp(-\Omega(n)) = \exp(-\Omega(n))$$

Satz: Ist G tractable, dann Hamiltonkreis in Polynomialzeit konstruierbar.

Beweis: Start: Konstruktion eines möglichst langen Weges.

Wissen zum jetzigen Zeitpunkt nicht, dass H.-K. existiert.

Fangen an irgendeinem Knoten v an.



Bis $\frac{n}{2} - \frac{n}{50} + 1$ ist garantiert.

Kriegen so einen Weg der Länge

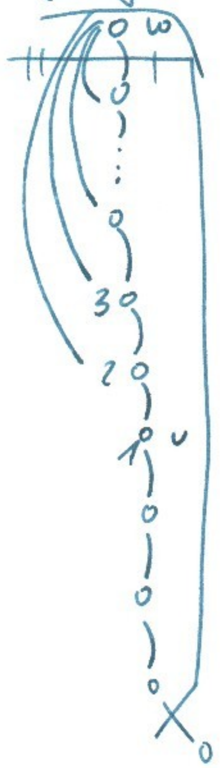
$$\geq \frac{n}{2} - \frac{n}{50} + 1$$

Algorithmus: · Fange mit v an.
· Nehme immer einen neuen Nachbarn.

7.6.17

∘ <u>Verbesserung mit</u>: (ii) $\#(N(u) \cup N(v)) \geq \frac{3}{4}n - \frac{n}{50}$

Verlängerung d. Weges.



$$\#(N(v) \cup N(w)) \geq \frac{3}{4}n - \frac{n}{50}$$

Ist dieses Stück $\geq \frac{3}{4}n - \frac{n}{50}$, dann ist nicht garantiert, dass es weitergeht

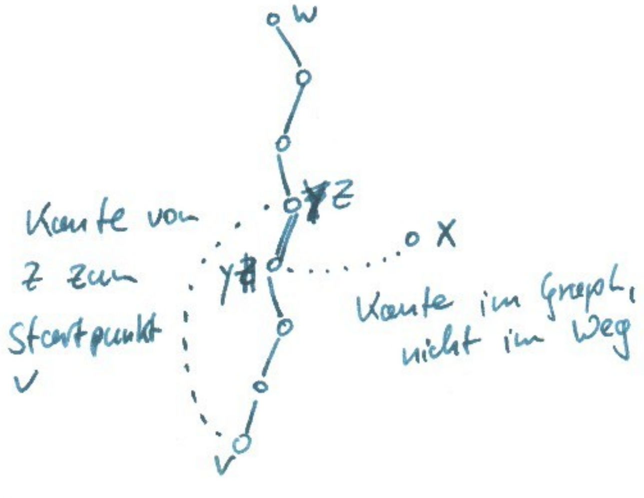
$\boxed{\text{Weglänge: } \geq \frac{3}{4}n - \frac{n}{50}}$

Algorithmus geht weiter:

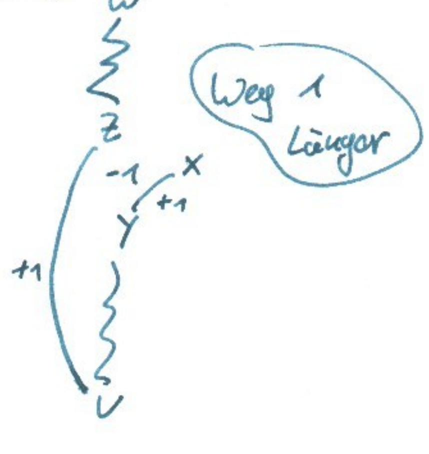
- Gehe von v aus noch einmal mit einem noch nicht erfassten Nachbarn weiter.

∘ <u>Weitere Verlängerung des Weges</u>: auf $\geq \frac{7}{8}n - \frac{n}{50}$

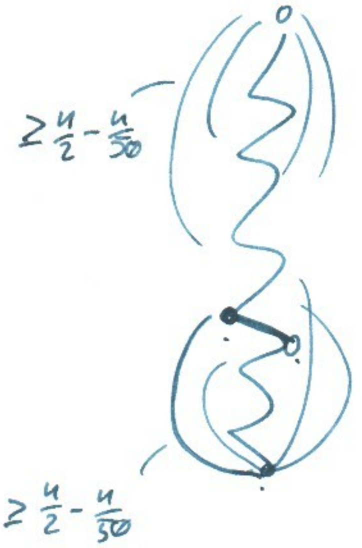
Prinzip geht so:



neuer Weg



<u>Situation:</u> vorheriger Algorithmus geht nicht mehr.

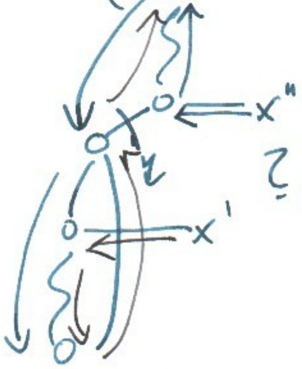


Alle Nachbarn der Endpunkte sind auf dem Weg.

$\geq \frac{7}{8}n - \frac{n}{50}$

$\Rightarrow \exists$ Knoten, der von oben & unten getroffen.

$\geq \frac{7}{8}n - \frac{n}{50}$ Nachbarn davon einer nicht im Weg.



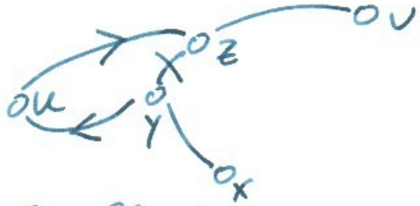
nochmal zur Verlängerung des Weges auf $> \frac{3}{4}n$ ...

13.6.17

Situation: Der vorherige Schritt funktioniert nicht mehr. D.h. beide Endpunkte haben keinen Nachbarn außerhalb!

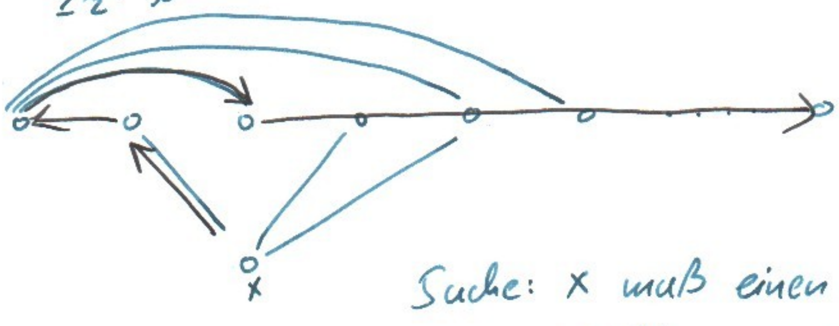
$\geq \frac{3}{4}n - \frac{n}{50}$

neuer Knoten x kommt hinzu:



die Situation muß existieren.

$\geq \frac{n}{2} - \frac{n}{50}$



Suche: x muß einen linken Nachbarn von einen Bogen treffen

3 Bögen ~~haben~~, die hinter dem 4. Knoten enden, haben 3 verschiedene linke Nachbarn.
Diese 3 linken Nachbarn haben $\frac{7}{8}n - \frac{n}{50}$ Nachbarn.
Also finden wir bis zur Weglänge ~~#~~ $\geq \frac{7}{8}n - \frac{n}{50}$ so ein x!

13.6.17

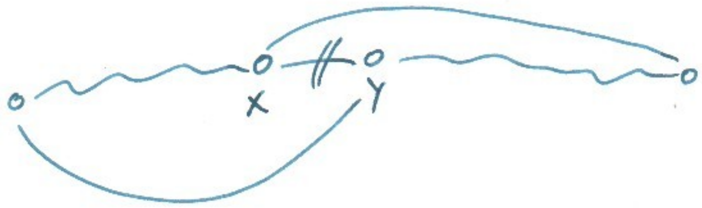
Solange wie es geht, die folgenden Schritte:

1. An den Endpunkten verlängern
2. Wenn 1. nicht geht, 3 Bögen die 3 linken Nachbarn.

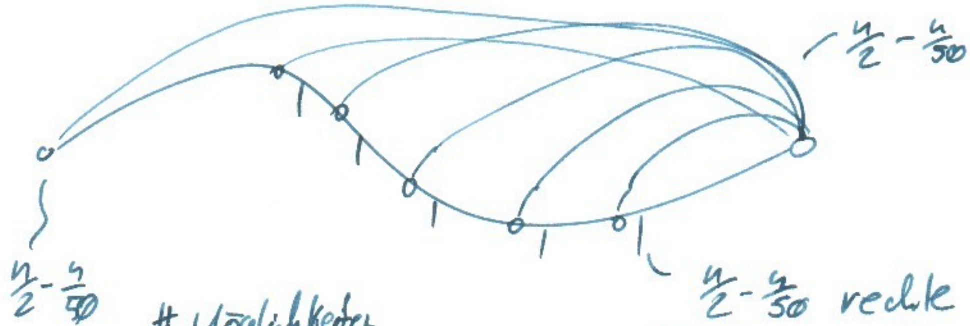
Dann weiter bei 1.

Jetzt wird ein Kreis geschlossen:

1. Möglichkeit: haben Kante ~~auf~~ $x - y$ auf dem Weg und die Endpunkte des Weges haben Kante zu den entgegen Knote y, x



Angenommen Weg hat die Länge $= \frac{7}{8}n$ (als Bsp.)



Möglichkeiten

$$\frac{7}{8}n - \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{50}\right) = \frac{3}{8}n + \frac{n}{50} < \frac{n}{2} - \frac{n}{50}$$

Bei Weg von Länge

$= \frac{7}{8}n$ geht die 1. Möglichkeit

13.6.17

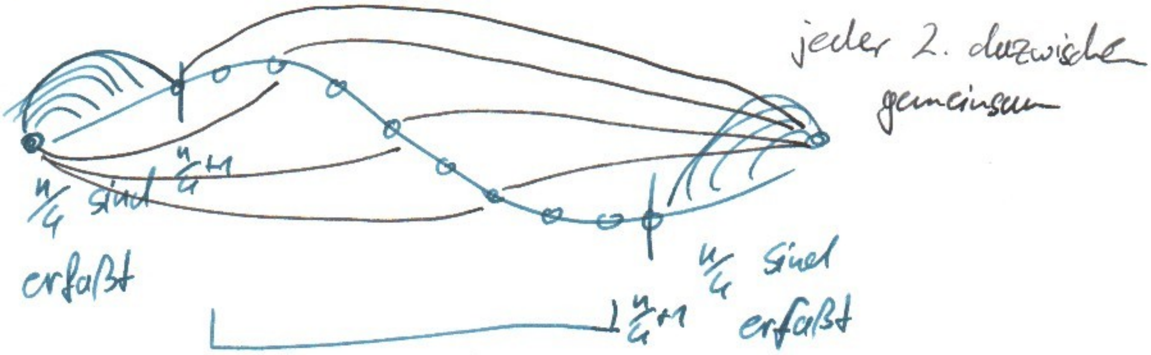
Geht das immer?

$\Rightarrow$ Wenn der Weg länger ist nicht unbedingt!

Beachte: der Weg hört auf, wenn die Schritte nicht mehr gehen.

Angenommen: Weg von $n-\frac{n}{50}$

∘ Bögen, so dass 1. Möglichkeit nicht klappt!



$n-\frac{n}{50}-\frac{n}{2}$

$=\frac{n}{2}-\frac{n}{50}$

Beide Enden haben $=\frac{n}{2}-\frac{n}{50}$ Nachbarn

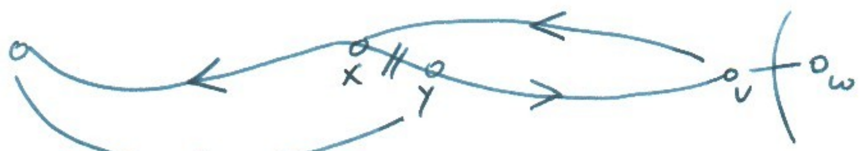
Müssen von jeder Seite $\frac{n}{4}-\frac{n}{50}$ erfassen

$$\left(\frac{n}{4}-\frac{n}{50}\right)\cdot 2=\frac{n}{2}-\frac{2n}{50}<\frac{n}{2}-\frac{n}{50}$$

~~geht~~

13.6.17

2. Möglichkeit



Der Letzte fehlt.

Zeigen: Eine Möglichkeit geht immer!

$\frac{n}{2} - \frac{n}{50}$ Bögen

$\frac{3n}{4} - \frac{n}{50}$

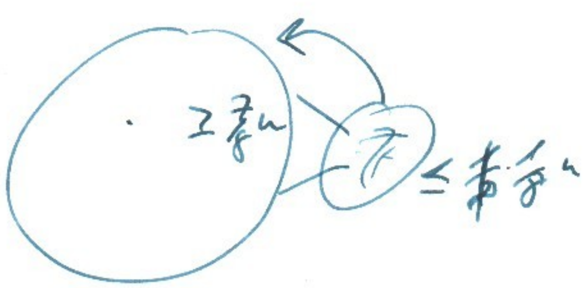
$\frac{n}{2} - \frac{n}{50}$ Knoten (links der Bogen) muß

in $N(v) \cup N(w)$ liegen

Es liegen $\underbrace{\frac{5}{8}n - \frac{2n}{50}}$ Elemente aus $N(v) \cup N(w)$ auf dem Weg.

$\underline{\frac{5}{8}n > \frac{n}{2}}$

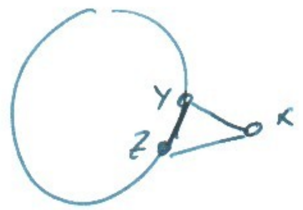
$\Rightarrow$ Haben jetzt Kreis der Länge $\geq \frac{7}{8}n - \frac{n}{50} - 1$



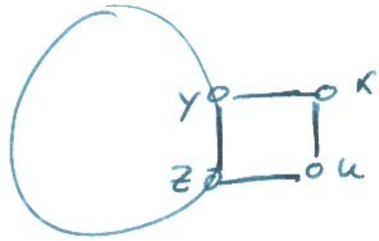
13.6.17

Restliche Knoten einbauen

1. Möglichkeit:



2. Möglichkeit:



Es gilt: Solange wir Kanten rein außerhalb des Kreises haben, geht die 1. oder 2. Möglichkeit!

Sei x o—o u Kante ganz außerhalb des Kreises.

$$\#\big(N(x) \cup N(u)\big) \geq \frac{3}{4}n - \frac{n}{50}$$

von diesen können schlimmstenfalls

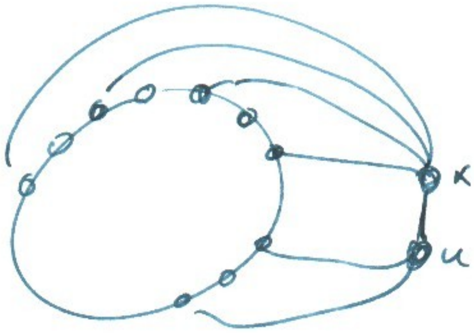
$\frac{1}{8}n + \frac{n}{50}$ nicht im Kreis liegen.

$\Rightarrow$ Im Kreis liegen $\geq \frac{3}{4}n - \frac{n}{50} - \frac{1}{8}n - \frac{n}{50}$

$$= \frac{5}{8}n - \frac{2n}{50} \gg \frac{1}{2}n$$

Falls die 1. Möglichkeit nicht klappt, muß es so aussehen:

13.6.17



Ebenso von u aus.

$$\frac{n}{2} - \frac{n}{50} - \frac{n}{8} - \frac{n}{50} = \frac{3}{8}n - \frac{2n}{50}$$

~~Falls~~ Platz für u ist dann noch

$$\leq \frac{5}{8}n + \frac{2n}{50}$$

u hat $\frac{n}{2} - \frac{n}{50}$ Nachbarn,
von ~~denen~~ denen sind $\frac{3}{8}n - \frac{2n}{50}$
auf dem Kreis.

da $2 \cdot \left(\frac{3}{8}n\right) \gg \frac{5}{8}n$ geht die 1. Mögl.

mit u.

5. Situation:

restliche $\leq \frac{1}{8}n + \frac{n}{50} + 1$ Knoten haben untereinander keine Kanten.

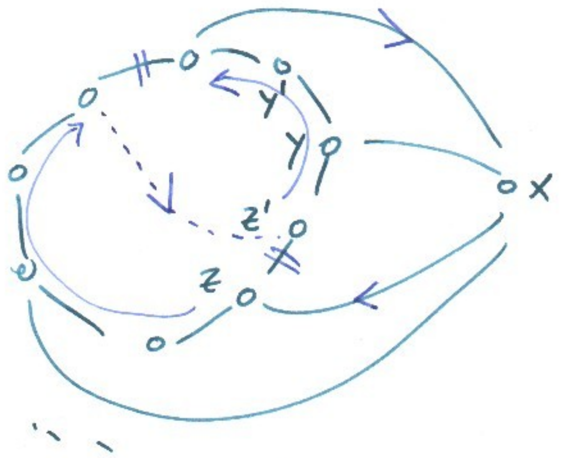
$\geq \frac{n}{2} - \frac{n}{50}$ Nachbarn

Kreis $\geq \frac{7}{8}n - \frac{n}{50} - 1$ Knoten

falls 2 auf Kreis benachbart sind ✓

✓

jetzt: alle Nachbarn auf dem Kreis haben Abstand ≥ 2



x, y, z fest

$\#(N(z') \cup N(y')) \geq \frac{3}{4}n - \frac{n}{50}$

$\#((N(z') \cup N(y')) \cap \text{Kreis})$

$\geq \frac{5}{8}n - \frac{2n}{50}$

(y' od z' ~~m~~ muß Kante zu ~~Nach~~ Nachbarn von x haben)

20.6.17

6. Lovasz Local Lemma

Aussagenlogische Formeln in k-KNF

$$\underbrace{(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_5 \vee \ldots \vee x_n)}_{} \wedge (\quad \vee \quad) \wedge \ldots$$

genau k verschiedene
Literale $x, \neg x$
Nicht $x, \neg x$ gleichzeitig

Extremfall: alle Klauseln über verschiedenen Variablen

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_5 \vee x_6 \vee x_7) \wedge \ldots$$

Ist klar erfüllbar.

Problem: Was ist, wenn jede Klausel mit „wenigen" Klauseln Variablen gemeinsam hat

$$(\; x \;) \wedge \ldots \wedge (\; \neg x \;)$$

?

Klausel C in k-KNF F. Umgebung von C in F.

$$\Gamma_F(C) = \{ D \in F \mid D \text{ und } C \text{ haben Variablen gemeinsam} \}$$

$(D \neq C)$

$x \in C,\ x \in D$ od.
$x \in C,\ \neg x \in D$

Konfliktumgebung

$$\Gamma_F'(C) = \{ D \in F \mid \text{Es gibt } x \in D \text{ mit } \neg x \in C \text{ oder } x \in C', \neg x \in D \}$$

Satz: Sei $k \in \mathbb{N}$, k-KNF F.
↳ genau k !

Ist für alle Klauseln $C \in F$

$\Gamma_F(C) \leq \frac{2^k}{e} - 1$

dann ist F erfüllbar.

(Beachte: #Variablen $= n$ von F kommt nicht vor)

Wird für größere k interessant.
$k = 10$
$\frac{1024}{2{,}7} - 1 \approx 400$

Interpretation des Satzes: $\text{Grad}(x) = \#\text{Vorkommen von } x + \#\text{Vorkommen von } \neg x$

$k = 10$

$C = (\overbrace{x_1}^{} \vee \ldots \vee \overbrace{x_{10}}^{(d-1)})$ $\quad \Gamma_F(C) \leq 10 \cdot (d-1)$

x_1: $(d-1)$

max. Klauseln in ~~Konflikt~~ Umgebung

d = maximaler Grad einer Variablen

$10 \cdot (d-1) \leq \frac{2^{10}}{e} - 1$

$\Leftrightarrow \quad d - 1 \leq \frac{2^{10}}{10e} - \frac{1}{10}$

$d \approx 30$ reicht (f. Erfüllbar)

(n Variablen, $k = 10$
$\frac{30n}{10} = 3n$ Klauseln
$30n$: Plätze
10: pro Klausel)

20.6.16

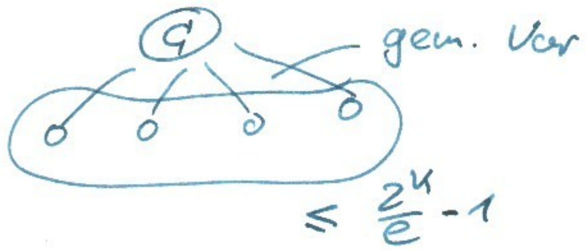
<u>Bsp.:</u> k-KNF, mit allen 2^k verschiedenen Klauseln. $\to$ unerfüllbar!

$k=2 \quad (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$

$\Gamma(C) = 2^k - 1$

Aber bei $\frac{2^k}{e} - 1$ immer erfüllbar!

<u>Beweis:</u> F ist unsere Formel und für alle $C \in F$ ist $\#\Gamma_F(C) \leq \frac{2^k}{e} - 1$.



Betrachten zufällige Belegung $\alpha: V \to \{0,1\}$

$V =$ Menge der in F vorkommenden Variablen.

$\#V = n$, 2^n Belegungen, uniform verteilt

$\boxed{\text{Prob}[\alpha \text{ macht } F \text{ wahr}] \neq 0}$, dann existiert erfüllende Belegung.

$\downarrow$

<u>Zu Zeigen</u>

(104) 20.6.17

- Betrachten dazu $F' \subsetneq F$, F' entsteht aus F durch Löschen von mindestens einer Klausel.

- Sei C eine gelöschte Klausel.

Nun gilt: $\text{Prob}[\alpha \text{ macht } F' \text{ und } C \text{ wahr}]$

(noch zeigen) für alle F'!

$$\geq \underbrace{\left(1-\frac{e}{2^k}\right)}_{<1,\ >0} \cdot \text{Prob}[\alpha \text{ macht } F' \text{ wahr}]$$

Der Satz folgt dann so:

$F' = \emptyset$, ohne Klausel

$\text{Prob}[\alpha \text{ macht } F' \text{ wahr}] = 1$

$\hookrightarrow \text{Prob}[\alpha \text{ macht } C_1 \text{ wahr}] \geq \left(1-\frac{e}{2^k}\right) \cdot 1$

$\hookrightarrow \text{Prob}[\alpha \text{ macht } C_1 \wedge C_2 \text{ wahr}] \geq \left(1-\frac{e}{2^k}\right) \cdot \left(1-\frac{e}{2^k}\right)$

$\hookrightarrow \ldots$

$\hookrightarrow \text{Prob}[\alpha \text{ macht } \underbrace{C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m}_{=F} \text{ wahr}]$

$$\geq \left(1-\frac{e}{2^k}\right)^m$$

$$> 0$$

20.6.17

$F' = \emptyset$

$$\text{Prob}[\alpha \text{ macht } C \text{ wahr}] = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \geq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right)$$

passt!

$$\text{Prob}[\alpha \text{ macht } C \wedge D \text{ wahr}]$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$ wenn beide über disjunkte Variablen gehen.

$$\ldots = \left(1 - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k}\right) \geq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right)^2$$

für $C = (x_1 \vee \ldots \vee x_k)$

$D = (\neg x_1 \vee \ldots \vee \neg x_k)$

<u>weiter im Beweis:</u>

F gegeben, m Klauseln, $F' \subsetneq F$, für alle $C \in F \setminus F'$

~~Für beliebiges $C \in F$~~

gilt $\text{Prob}[\alpha \text{ macht } F' \wedge C \text{ wahr}] \geq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right) \cdot$ Prob[α macht F' wahr]

<u>Induktionsanfang:</u> Gilt für $F' = \emptyset$ mit

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2^k}}_{\text{Prob}[C]} \geq 1 - \frac{e}{2^k}.$$

$= \text{Prob}[\alpha \text{ macht } C \text{ wahr}]$

Die Behauptung ist äquivalent zu:

$$\text{Prob}[\alpha \text{ macht } F' \wedge \neg G \text{ wahr}] \leq \frac{e}{2^k}$$

Da $\text{Prob}[\alpha \text{ macht } F' \text{ wahr}] =$

$$\text{Prob}[\alpha \text{ macht } F' \wedge G \text{ wahr}]$$
$$+ \text{Prob}[\alpha \text{ macht } F' \wedge \neg G \text{ wahr}]$$

20.6.17

Induktionsschluß:

F' hat $l \geq 1$ $(m-1 \geq l \geq 1)$ Klauseln. Die Behauptung gilt für alle $F'' \subsetneq F$ mit $\leq l-1$ Klauseln. (Ind.-vor.)

Sei $G \in F \setminus F'$

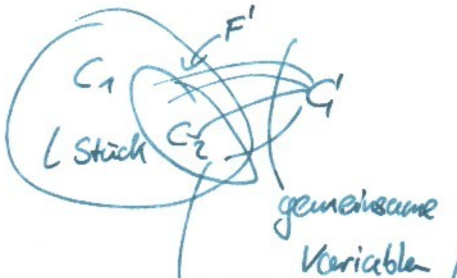
1. Fall: G hat keine gemeinsamen Variablen mit dem Rest von F.'

$$\text{Prob}[\alpha \text{ macht } F' \wedge G \text{ wahr}] = \text{Prob}[F' \wedge G]$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdot \text{Prob}[F'] \geq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right) \cdot \text{Prob}[\alpha \text{ macht } F' \text{ wahr}]$$

21.6.17

2. Fall: G hat mit F' Variablen gemeinsam.



$\subseteq \Gamma_F(G)$ $\quad \frac{2^k}{e} - 1 \geq |\Gamma_F(G)|$

$$F'' := F' \setminus \Gamma_F(C)$$

$\#F'' \leq l-1$, da 2. Fall

$\Rightarrow$ Ind.-vor. anwendbar!

$$\text{Prob}[F'' \wedge C] \geq \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdot \text{Prob}[F'']$$

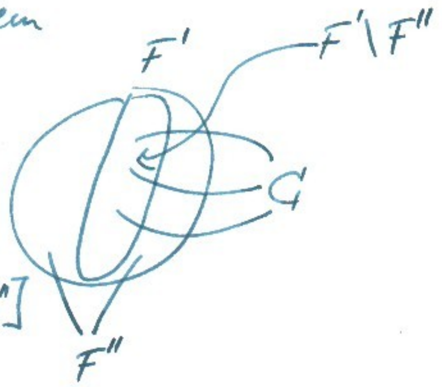
$$\text{Prob}[\neg C \wedge F''] = \frac{1}{2^k} \cdot \text{Prob}[F'']$$

$$1 \leq \#F' - \#F'' \leq \frac{2^k}{e} - 1$$

Sei $F' \setminus F'' = \{D_1, \ldots, D_h\}$, $1 \leq h \leq \frac{2^k}{e} - 1$.

21.6.17

Gehen von F'' zu F' indem wir $D_1, \ldots, D_h$ schrittweise hinzufügen. (Ind. vor.)



$$\mathrm{Prob}[F'' \wedge D_1] \geq \left(1-\frac{e}{2^k}\right) \cdot \mathrm{Prob}[F'']$$

$$\mathrm{Prob}[(F'' \wedge D_1) \wedge D_2] \geq \left(1-\frac{e}{2^k}\right)^2 \cdot \mathrm{Prob}[F'' \cancel{\wedge D_1}]$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{Prob}[(F'' \wedge D_1 \wedge \ldots \wedge D_{h-1}) \wedge D_h] \geq \left(1-\frac{e}{2^k}\right) \cdot \left(1-\frac{e}{2^k}\right)^{h-1} \cdot \mathrm{Prob}[F'']$$

$$= \left(1-\frac{e}{2^k}\right)^h \cdot \mathrm{Prob}[F''] = \mathrm{Prob}[F']$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Prob}[F'] \geq \left(1-\frac{e}{2^k}\right)^h \cdot \mathrm{Prob}[F'']$$

$$\geq \frac{1}{e} \cdot \mathrm{Prob}[F'']\text{, denn}$$

(siehe später)

$h \leq \frac{2^k}{e} - 1$!

$$\left(1-\frac{e}{2^k}\right)^h \geq \left(1-\frac{e}{2^k}\right)^{\left(\frac{2^k}{e}-1\right)}$$

$$= \left(1-\frac{e}{2^k}\right)^{\left(\frac{e}{2^k}\right)^{-1}-1}$$

?

genau ausrechnen ?!

$$\mathrm{Prob}[F'' \wedge \neg C] = \frac{1}{2^k} \cdot \mathrm{Prob}[F'']$$

$$\mathrm{Prob}[F' \wedge \neg C] \leq \mathrm{Prob}[F'' \wedge \neg C] \leq \frac{1}{2^k}\, \mathrm{Prob}[F'']$$

$$\mathrm{Prob}[F'] \geq \frac{1}{e}\, \mathrm{Prob}[F'']$$

21.6.17

Dann gilt:

$$\frac{\text{Prob}[F' \wedge \neg C]}{\text{Prob}[F']} \leq \frac{e}{2^k}$$

$$\text{Prob}[F' \wedge \neg C] \leq \text{Prob}[F'] \cdot \frac{e}{2^k}$$

$\Downarrow$ aus $\text{Prob}[F'] = \text{Prob}[F' \wedge C] + \text{Prob}[F' \wedge \neg C]$

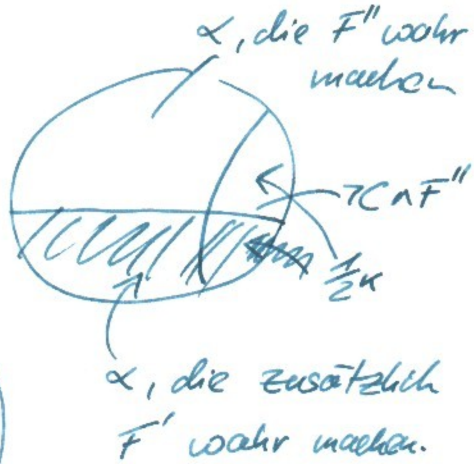
$$\text{Prob}[F' \wedge C] \geq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right) \cdot \text{Prob}[F']$$

//

27.6.17

$$\mathrm{Prob}[F'] \geq \frac{1}{e} \cdot \mathrm{Prob}[F'']$$

$$\mathrm{Prob}[\neg C \wedge F''] = \frac{1}{2^k} \cdot \mathrm{Prob}[F'']$$



Es reicht, zu zeigen

$\mathrm{Prob}[C \mid F'] \geq 1 - \frac{e}{2^k}$, denn

$$\frac{\mathrm{Prob}[C \wedge F']}{\mathrm{Prob}[F']} \geq 1 - \frac{e}{2^k}$$

$\iff$

$$\mathrm{Prob}[C \wedge F'] \geq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right) \mathrm{Prob}[F']$$

Was ist $\mathrm{Prob}[\neg C \mid F']$?

$$\mathrm{Prob}[\neg C \mid F'] \overset{!}{\leq} \frac{e}{2^k}$$

Dann ist $\mathrm{Prob}[C \mid F'] \geq 1 - \frac{e}{2^k}$

$$\mathrm{Prob}[\neg C \mid F'] \leq \frac{e}{2^k}$$

$$\mathrm{Prob}[F''] \leq e \cdot \mathrm{Prob}[F']$$

$$\mathrm{Prob}[F'] = \mathrm{Prob}[\neg C \wedge F'] + \mathrm{Prob}[C \wedge F']$$

$$\mathrm{Prob}[\neg C \wedge F''] = \frac{1}{2^k} \cdot \mathrm{Prob}[F''] \leq \mathrm{Prob}[F'] \cdot \frac{e}{2^k}$$

27.6.17

$$\text{Prob}[\neg C \wedge F'] \leq \frac{e}{2^k} \cdot \text{Prob}[F'] \quad \text{zu zeigen}$$

$$\text{Prob}[\neg C \wedge F'] \leq \text{Prob}[\neg C \wedge F''] = \frac{1}{2^k} \text{Prob}[F'']$$

$$\leq \frac{e}{2^k} \text{Prob}[F'] \quad \checkmark$$

mit

$$\text{Prob}[F'] \geq \frac{1}{e} \text{Prob}[F'']$$

---

bleibt noch:

$$\left(1 - \frac{e}{2^k}\right)^l \geq \underbrace{\left(1 - \frac{e}{2^k}\right)^{\frac{2^k}{e} - 1} \geq \frac{1}{e}}$$

$$\underbrace{\left(1 + \underbrace{\frac{a}{n}}_{\geq -1}\right)}_{>0}^{n} \quad \text{für } a \geq -n$$

steigt in n. (für $n \geq -a$)

$$\underbrace{1 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{a}{n}\right)\left(1 + \frac{a}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{a}{n}\right)}_{n \text{ Faktoren}}}_{n+1 \text{ Faktoren}} \leq \underbrace{\left(1 + \frac{a}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)}_{n+1 \text{ Faktoren}}$$

Summe d. Faktoren:

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$n+1+a$ $\quad$ $n+1+a$

27.6.17

Arithm. Mittel:

$$1+\frac{a}{n+1}$$

geometr. Mittel:

$$= \left(1\cdot\left(1+\frac{a}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\left(1\cdot\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n+1}} \le 1+\frac{a}{n+1}$$

$$\iff \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}$$

geom. M $\le$ arithm. M.

AGM-Ungleichung

$a_1, a_2 \ge 0$

$$\sqrt{a_1\cdot a_2} = (a_1\cdot a_2)^{\frac{1}{2}} \le \frac{a_1+a_2}{2}$$

$$\iff a_1a_2 \le \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$$

$$\iff 4a_1a_2 \le (a_1+a_2)^2$$

$$\iff 2a_1a_2 \le a_1^2+a_2^2$$

$$\iff (a_1-a_2)^2 \ge 0 \checkmark$$

Einfacher:

$$b_1b_2 \le \frac{b_1^2+b_2^2}{2}$$

$$\iff (b_1-b_2)^2 \ge 0$$

noch Einfacher:

$$A=\frac{a_1+a_2}{2}$$

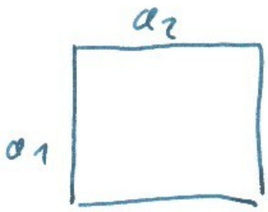
$$D=\frac{a_2-a_1}{2}$$

$$\underbrace{(A+D)}_{=a_1}\underbrace{(A-D)}_{=a_2} = A^2-D^2 \le \underbrace{A^2}_{=\frac{a_1+a_2}{2}}$$

$a_2 = A+D$

$a_1 = A-D$

27.6.17



$a_1 \cdot a_2 =$ Fläche

$a_1 + a_2 = C$ halber Umfang

maximal für

$$a_1 = a_2 = \frac{C}{2}$$

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2} \le \frac{C}{2} \qquad a_1 a_2 \le \frac{C^2}{4} = \frac{C}{2} \cdot \frac{C}{2}$$

$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ steigt in n ($a \ge -n$), gezeigt

$$\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}\right)$$

$\left(\frac{1}{1+\frac{a}{n}}\right)^n$ fällt also!

$$\left(\frac{1}{1+\frac{a}{n}}\right) = \frac{n}{n+a} = \frac{n+a-a}{n+a} = 1 - \frac{a}{n+a}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\frac{n}{a}+1}\right)$$

$\Rightarrow \left(1 \cancel{+} - \frac{1}{\frac{n}{a}+1}\right)^n$ fällt, Annahme $a \ge 0$

also auch

$\left(1 - \frac{1}{\frac{n}{a}+1}\right)^{\frac{n}{a}}$ fällt.

27.6.17

$$\left(1-\frac{1}{\frac{n}{a}+1}\right)^{\frac{n}{a}}$$ fällt in n, $a>0$

$\Bigg($ wir brauchen $\left(1-\frac{1}{\left(\frac{2^k}{e}\right)}\right)^{\frac{2^k}{e}-1} \geq \frac{1}{e}$

$\frac{2^k}{e} = \left(\frac{2^k}{e}-1\right)+1$ $\Bigg)$

~~Zeigen:~~

$$\cancel{\left(1-\frac{1}{\frac{n}{e}}\right)^{\frac{n}{e}-1} \text{ fällt.}}$$

~~Suche a, so dass $\left(\frac{n}{a}+1\right) = \frac{n}{e}$~~

Zuerst:

$$\left(1-\frac{1}{\frac{n}{a}+1}\right)^{\frac{n}{a}} \geq \frac{1}{e}$$ mit $\to$ $\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^{-1} \to \frac{1}{e}$ für $n\to\infty$

$(1+\frac{1}{x})^x \to e$

$$\cancel{\frac{n}{a}+1 = \frac{n}{b} \iff bn+ba = an \iff a = \frac{bn}{n-b}}$$

Nun:

$$\left(1-\frac{1}{\frac{2^k}{e}}\right)^{\frac{2^k}{e}-1} \geq \frac{1}{e}$$

$$\frac{n}{a}+1 = \frac{2^k}{e}$$

$$\frac{n}{a} = \frac{2^k}{e}-1$$

$$a = \frac{n}{\frac{2^k}{e}-1} = \frac{n\cdot e}{2^k-e}$$

4.7.17

∘ <u>immernoch bei</u>:

$$\left(1-\frac{e}{2^k}\right)^{\frac{2^k}{e}-1} \geq \frac{1}{e}$$

zeigen $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-1} \geq \frac{1}{e}$ $\quad x=\frac{2^k}{e} \gneq 1$

(für alle $x \gneq 1$

$e^x \geq 1+x \quad x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{e^x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^x = e \quad x>0$

$\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x \geq \frac{1}{e} \quad x>0 \qquad (*)$

$\boxed{x \gneq 1}$

$$1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} = \frac{1}{\frac{x}{x-1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{x-1+1}{x-1}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}$$

also: $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}\right)^{x-1} \underset{\text{mit } (*)}{\geq} \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$

■

4.7.17

Wahrscheinlichkeit erfüllende Belegung

$$\geq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right)^m$$

$m = \#$ Klauseln

$n = \#$ Variablen

$m = c \cdot n$

$$\#\text{Belegungen} \geq 2^n \left(1 - \frac{e}{2^k}\right)^{c \cdot n}$$

$$\leq 2^n \left(e^{-\frac{e}{2^k}}\right)^{c \cdot n}$$

$$= e^{\left(\ln 2 - \frac{e}{2^k} \cdot c\right) n}$$

Kann bei c groß genug < 1 sein.

Also: Nur 1 Belegung garantiert.

Ein einfacher Algorithmus (zum Finden einer erfüllenden Belegung)

Gegeben: Formel mit genau n Variablen.

1. · Wähle Belegung α zufällig.

   $\text{Prob}[\alpha] = \frac{1}{2^n}$

   · Wenn alle Klauseln wahr. Feierabend.

2. Nehme irgendeine falsche Klausel.

   · wähle ~~alle~~ genau die Variablen der falschen Klausel zufällig neu.
   (Die anderen aus α bleiben wie vorher.)

   · Wenn alles wahr, dann Schluß. Sonst bei 2. weiter!

4.7.17

<u>Situation:</u>

Formel in K-KNF,

$$\Gamma(C) = \{ D \in F \mid D \text{ und } C' \text{ haben gemeinsame Variablen} \}$$

$C \in \Gamma(C')$. $\#\Gamma(C) \leq \cancel{2^k} \frac{2^k}{e} - 1$

$m = \#$ aller Klauseln von $F = \#F$

$n = \#$ Variablen

<u>Ziel:</u> Mit hoher Wahrscheinlichkeit (bzgl. dem Algorithmus) ist in Polynomialzeit Schluß.

<u>Beispielrechnungen:</u>

C' ← betrachtete Klausel $C \in F$

|

C'

|

C' Wkeit $\left(\frac{1}{2^k}\right)^5$

|

C'

|

C'

Zu einer Rechnung des Algorithmus ordnen wir Bäume zu.

$D_1, D_2, D_3, \ldots, D_t, D_{t+1}$

↑

Die Klauseln für die neu gezogen wird.

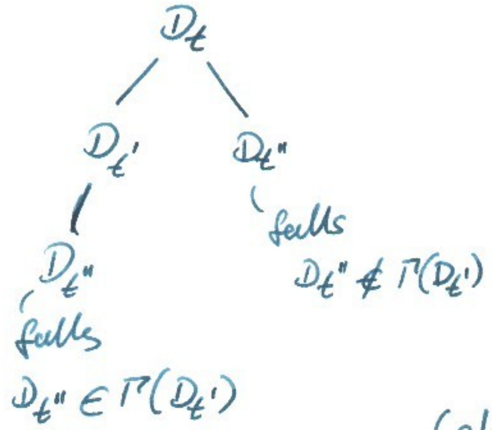
Beachte $D_i = D_j$ ~~kann~~ für $i \neq j$ kann auftreten!

4.7.17

- Zu D_1 gehört der Baum D_1.
- Zu D_2 gehört der Baum
  - D_2, wenn $D_1 \notin \Gamma(D_2)$
  - $\begin{array}{l} D_2 \\ / \\ D_1 \end{array}$, wenn $D_1 \in \Gamma(D_2)$
- Zu D_3 gehört
  - D_3, wenn $D_1, D_2 \notin \Gamma(D_3)$
  - $\begin{array}{l} D_3 \\ / \\ D_2 \end{array}$, wenn $D_1 \notin \Gamma(D_3)$, $D_1 \notin \Gamma(D_2)$, $D_2 \in \Gamma(D_3)$
  - $\begin{array}{l} D_3 \\ / \\ D_2 \\ / \\ D_1 \end{array}$, wenn $D_2 \in \Gamma(D_3)$, $D_1 \in \Gamma(D_2)$
  - $\begin{array}{ccc} & D_3 & \\ / & & \backslash \\ D_2 & & D_1 \end{array}$, wenn $D_2 \notin \Gamma(D_1)$, $D_1, D_2 \in \Gamma(D_3)$.

4.7.17

Baum zu D_t:



D_t: Wurzel

$D_{t'}$: „erste von rechts mit $D_{t'} \in \Gamma(D_t)$"

$t' = \max\{s \mid D_s \in \Gamma(D_t), s < t\}$

Gehe von $D_{t'}$ weiter nach links bis zur ersten Klausel $D_{t''}$, die aus $\Gamma(D_t) \cup \Gamma(D_{t'})$ ist.

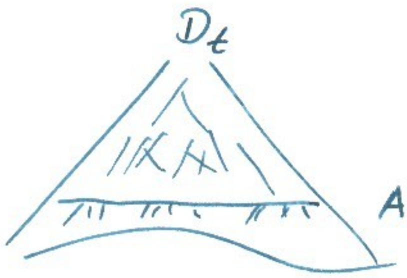
$D_{t''}$ wird unter eine tiefste Klausel im Baum gehängt, wo sie gemeinsame Variablen hat.

Allgemeine Vorschrift:

- Gehe von der letzten genommene Klausel ~~nach~~ weiter nach links, bis zur letzten Klausel, die mit dem Baum was gemeinsam hat.
- Hänge die Klausel unter eine tiefste Klausel ~~, die~~ im Baum, die mit der Klausel eine gemeinsame Variable hat.

4.7.17

Beobachtung:



Klauseln sind disjunkt.

Alle Klauseln in Tiefe h sind ~~disjunkt~~ paarweise disjunkt!

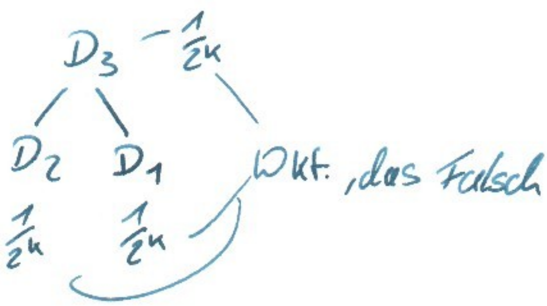
\# Kinder eines Knotens $\leq \frac{2^k}{e} - 1$

Keine weitere Kinder.

- Zusammenhang der Bäume von D_t und D_{t+1}

? Kann man nicht so genau sagen, viele Möglichkeiten

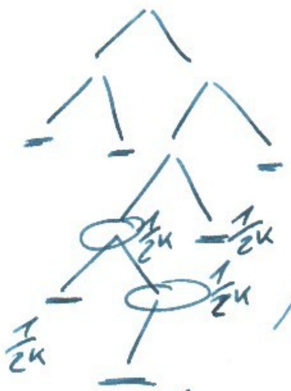
- Was können wir aus dem Baum über die Zufallsbits ableiten?



4.7.17

Haben einen solchen Baum:

- gleiche Tiefe paarweise disjunkt
- $\begin{matrix} C \\ / \\ D \end{matrix}$, dann $D \in \Gamma(C)$
- mit H Knoten.



Wkt, dass dieser Baum auftritt. $\Rightarrow \left(\frac{1}{2^k}\right)^H$

Umgekehrte Breitensuche

$\frac{1}{2^k}$, da am Anfang falsch.

Zufallsbits in Tabelle

x_1	x_2	x_3	.....	x_n
b_1	b_2	b_3		b_n
b_1'	b_2'	b_3'	.....	b_n'
b_1''	b_2''	b_3''		b_n''

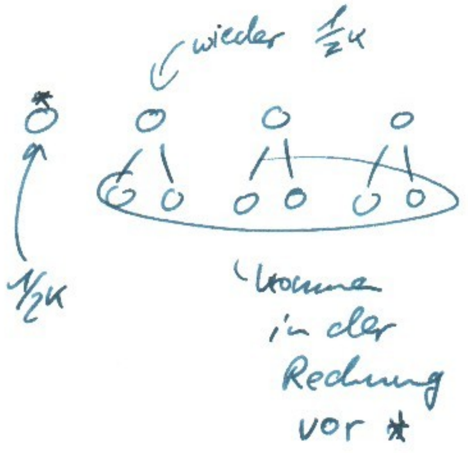
für x_1 ...

Tiefstes Blatt
- Aus Anfangsbelegung falsch.
- k Bits, die noch nicht bearbeitet sind.

- Für alle tiefsten Blätter aus der ersten Reihe. für Blatt falsch mit $\frac{1}{2^k}$

4.7.17

Stufe vorher:



5.7.17

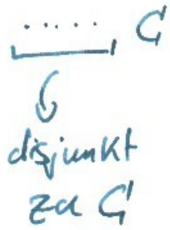
Behauptung: Baum mit H Knoten ist gegeben.
mit den obigen Eigenschaften

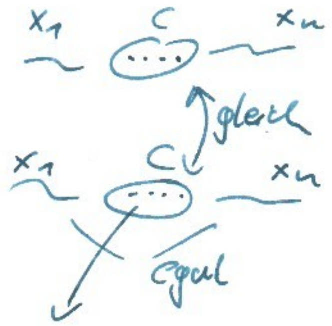
$$\mathrm{Prob}[\text{Rechnung} \mid \text{Baum } H \text{ ergibt sich aus der Rechnung}]$$

$$= \left(\frac{1}{2k}\right)^{H} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k \cdot H}$$

Beweis der Behauptung: Am Beispiel: Baum C'
(nur Wurzel)

Beispielrechnungen: $C, \ldots$ Zufallsbits

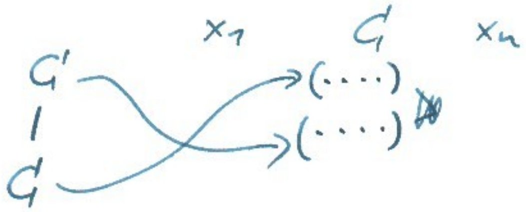




Wenn der Baum möglich ist, müssen diese Bits so sein!

5.7.17

weiteres Bsp.:

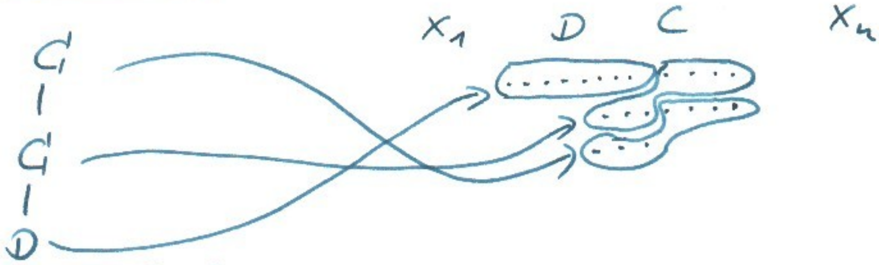


Rechnungen $\underbrace{\ldots}\ C\ \underbrace{\ldots}\ C$

disjunkt zu C

$\Rightarrow$ Wkt.: $\left(\frac{1}{2^k}\right)^2$

Komplizierteres Bsp.:



$D \neq C$

$D \in \Gamma(C)$

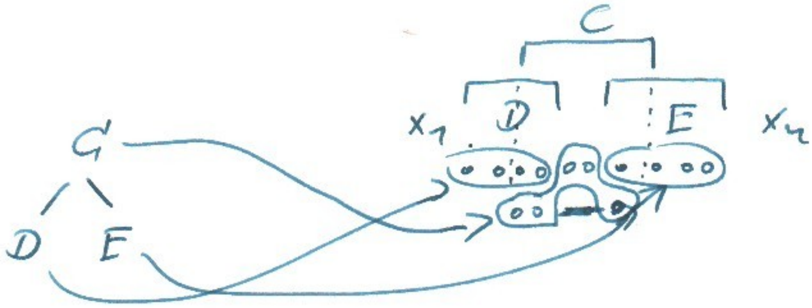
Rechnungen $\underbrace{\ldots}\ D\ \underbrace{\ldots}\ C\ \underbrace{\ldots}\ C \ldots$

disjunkt zu C, D

disjungkt zu C (zu D nicht unbedingt)

$\Rightarrow$ Wkt. $\left(\frac{1}{2^k}\right)^3$

5.7.17



$\square$ D $\square$ E $\square$ C'

disj. zu C, D, E — disj. zu C, E — disj. zu C'

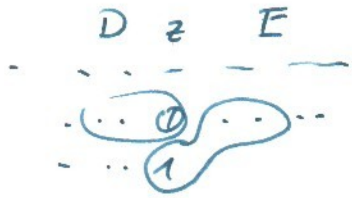
oder $\square$ E $\square$ D $\square$ C'

disj. zu C, D, E — disj. zu D, E — disj. zu C'

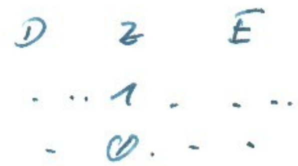
$\Rightarrow \left(\frac{1}{2^n}\right)^3$ f. beide Rechnungen.

Wo ist das wichtig, dass ~~..~~ D, E disjunkt sind?

Annahme: $z \in D$, $\neg z \in E$



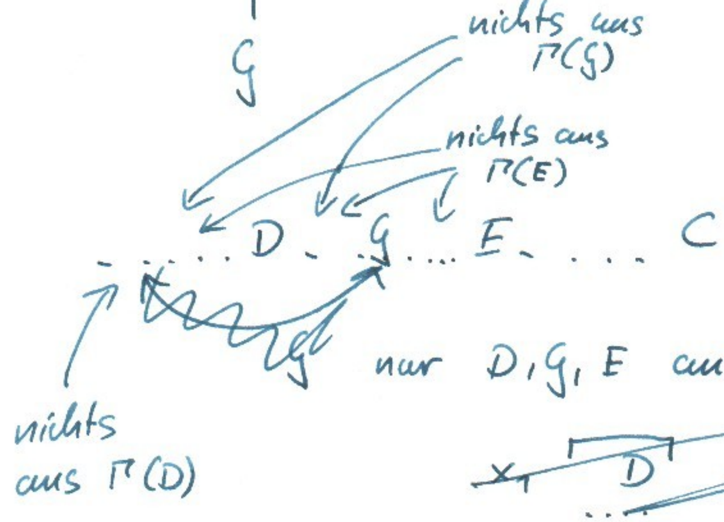
oder



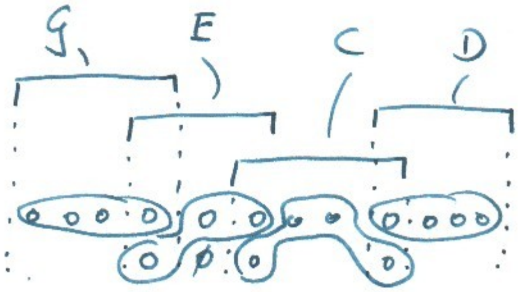
5.7.17

Ann.: $\mathcal{G} \notin \Gamma(D)$, $\mathcal{G} \in \Gamma(C)$

$\mathcal{G} \in \Gamma(E)$



nur $D, \mathcal{G}, E$ aus $\Gamma(C)$ möglich.

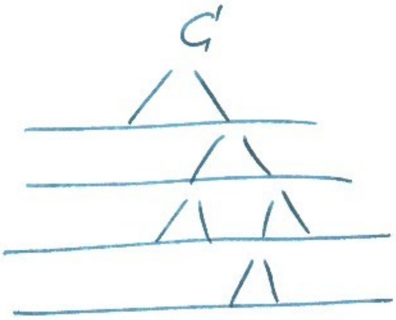


~~$\mathcal{G}$ D~~

$\mathcal{G}$ D E C

5.7.17

Im allgemeinen: von unten nach oben
(Ebenenweise, (umgekehrte Breitensuche))



ergibt die Bits in der Tabelle.

- jedesmal $\left(\frac{1}{2^k}\right)^H$ für Baum mit H Knoten.
- da $k \cdot H$ Bits fest gezogen sein müssen in Baum.

Annahme: ~~Der~~ Algorithmus läuft $q \cdot M$ Schritte lang.
\# Klauseln

$$D_1, D_2, \ldots\ldots, D_{q \cdot M}, D_{q \cdot M+1}, \ldots$$

Ein wie großer Baum ist garantiert?

$D_1 \quad D_2 \quad \ldots\ldots \quad D_{q \cdot M}$

$G \quad G \ldots G$

$\geq q$ mal. so ein G muß es geben!

Baum vom letzten G hat größe (# Knoten) $\geq q$.

5.7.17

Prob[Rechnung | Rechnung mindestens $q \cdot M$]

$\leq$ Prob[Rechnung | Es gibt Baum in Rechnung der Größe $\geq q$]

Wie viele Bäume der Größe q gibt es überhaupt?

1. Wähle die Wurzel: M Möglichkeiten
2. Wähle die weiteren Nachbarn.

$\#\Gamma(C)$ Pos

$C \underbrace{\ldots\ldots\ldots}$

$0100100\ldots$

$D \ldots E$

Nachbar vorhanden.

$\underbrace{\Gamma(D)}\ \underbrace{\Gamma(E)}$

$\Rightarrow$ Bitfolge zu jedem Baum.

Hat der Baum genau q Knoten, dann $q \cdot d$ Bits

($d = \frac{e}{4}\left(\frac{2^k}{e} - 1\right)$)

davon sind q Bits $= 1$.

Dann $\leq \binom{d \cdot q}{q}$ Möglichkeiten

$$\Rightarrow \#\text{ Bäume mit } q \text{ Knoten} \leq M \cdot \binom{d \cdot q}{q}$$

$$\leq M \cdot \left(\frac{q \cdot e \cdot d}{q}\right)^q$$

$$= M \, (e \cdot d)^q$$

Denn $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}$$

$$\frac{1}{k!} \leq \left(\frac{e}{k}\right)^k \Leftrightarrow \frac{k^k}{k!} \leq e^k$$

5.7.17

$\mathrm{Prob}[\text{Rechnung} \mid \text{Rechnung} \geq q \cdot M]$

$$\leq M (e \cdot d)^q \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)^q = M \cdot \left(\frac{e \cdot d}{2^k}\right)^q$$

Dann kann auch größer als q sein!

⇒ nicht unbedingt!

$$\leq M \cdot \left(\frac{e \cdot \left(\frac{2^k}{e} - 1\right)}{2^k}\right)^q$$

$$= M \left(\underbrace{1 - \frac{e}{2^k}}_{<1}\right)^q$$

$$\leq M \cdot e^{\left(-\frac{e}{2^k}\right) q}$$

$O(\log M)$

$\to 0$