Prof. Dr. A. Goerdt
Julian Pape-Lange

TU Chemnitz
Sommersemester 2019
18.04.2019

Effiziente Algorithmen / Theoretische Informatik III

Lösung zur 2. Übung

4. Aufgabe: Die in der vierten Aufgabe geforderte Induktion ist sehr einfach wenn man die Gleichungen $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ und $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$ hat. Dass diese Gleichungen gelten, kann man durch die binomische Formel sehen. Außerdem braucht man zwei Werte für den Induktionsanfang.
Schwieriger ist die Herleitung der Formel. In dieser Lösung wird ein Ansatz über lineare Algebra und Basistransformation beschrieben:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{pmatrix}.$$

Für $a = f_{n+2}$, $b = c = f_{n+1}$ und $d = f_n$ folgt

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+3} & f_{n+2} \\ f_{n+2} & f_{n+1} \end{pmatrix}$$

und damit induktiv

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} f_{n+2+i} & f_{n+1+i} \\ f_{n+1+i} & f_{n+i} \end{pmatrix}.$$

Als nächstes muss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^i$$

berechnet werden. Man kann zeigen, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ mit Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ hat. Daher gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^i &= \left(\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^i \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} & -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i & -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Jetzt kann man mit

$$\begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{und} \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} f_{n+2+i} & f_{n+1+i} \\ f_{n+1+i} & f_{n+i} \end{pmatrix}$$

folgern, dass

$$\begin{aligned}
f_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2 &\left(-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i} \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)
\end{aligned}$$

gilt. Dies kann zu $f_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \right)$ vereinfacht werden. Analog zu den bereits genannten Identitäten $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ und $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$ können auch $\frac{5+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ und $\frac{5-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3$ gezeigt werden. Daraus folgt $f_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+3} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+3} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \right)$. Mit Hilfe der Gleichung $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1$ folgt schließlich die gewünschte Aussage

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+2} \right)$$