19.04.2018

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Algorithmik

Sommersemester 2018

1. Übung

Binomialverteilung mit n, p, $0 \leq p \leq 1$, auf $0, \dots, n$

$$\text{Prob}[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad 0 \leq k \leq n.$$

Damit wird $0, \dots, n$ zu einem W-Raum, dazu

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \right) \overset{!}{=} 1$$

$p = \frac{1}{2}$: $p^k (1-p)^{m-k}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^m$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m$$

$$(x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$= \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} xy + \binom{2}{2} x^0 y^2$$

$$(x+y)(x+y)(x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$= \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y + \binom{3}{2} xy^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^{3-k} y^k$$

$$\left(\binom{3}{k} = \binom{3}{3-k} \right)$$

Immer für $0 \leq k \leq m$

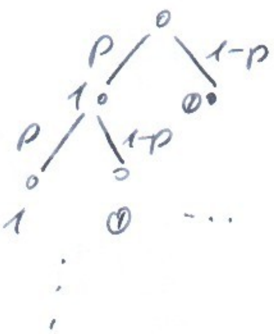
$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$, denn

$$\frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \frac{m!}{(m-k)!\,(m-m+k)!}$$

allgemein: $$\boxed{(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k}}$$

also: $$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = (p + (1-p))^m$$
$$= 1^m = \underline{\underline{1}}$$
$(\text{für } p \neq 0)$

Erzeugung eines Raumes für X: (m-mal ziehen aus $\{0,1\}$ mit



1. Stelle

2. Stelle

$\text{Prob}[1] = p$

$\Rightarrow X \hat{=}$ # gezogener 1en)

$X(b_1, b_2, \dots, b_m) =$ # Einsen

Erwartungswert: $E[X] = p \cdot m$

Dazu brauchen wir die Linearität des E-Wertes:

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ 2 Zufallsvariablen, dann ist $(X+Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ auch ZV.

Es gilt: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

- $(\alpha \cdot X) : \Omega \to \mathbb{R}$, $E[\alpha X] = \alpha \cdot E[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig.

19.04.
2018

Beweis:

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega}^{m} Prob[\omega] \cdot X(\omega)$$

$$= \sum_{a \in X(\Omega)} a \cdot Prob[X=a]$$

$$E[X+Y] = \sum_{\omega \in \Omega} Prob[\omega] \, (X+Y)(\omega$$

$$= \sum_{\omega} \Big(Prob[\omega] \, X(\omega) + Prob[\omega] \, Y(\omega) \Big)$$

$$= \underline{\underline{E[X] + E[Y]}}$$

$$E[a \cdot X] = \sum_{\omega} \Big(Prob[\omega] \cdot a \cdot X(\omega) \Big)$$

$$= a \cdot \sum_{\omega} \Big(Prob[\omega] \cdot X(\omega) \Big)$$

$$= \underline{\underline{a \cdot E[X]}}$$

Zurück zu X aus der Behauptung von oben.

$$E[X] = \sum_{k=0}^{m} = \Big(\underbrace{\binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}}_{Prob[X=k]} \cdot k \Big)$$

~~Mit Lin Linearität: $X_1, \dots, X_m$ alle $X_i : \Omega \to \mathbb{N}$~~

Mit Linearität:

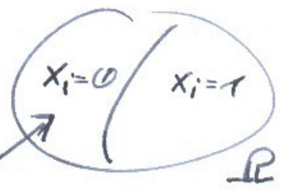
$$X_1, X_2, \dots, X_m : \Omega \to \mathbb{N} \quad , \quad \Omega = \{0,1\}^m$$

$$\text{Prob}[(b_1, b_2, \dots, b_m)] =$$

$$p^{b_1+b_2+\dots+b_m} \cdot (1-p)^{(1-b_1)+\dots+(1-b_m)}$$

$$X_i\,(b_1, \dots, b_m) := b_i$$

$$X_i : \Omega \to \{0,1\}$$



Indikatorvariable
für diese
Teilmenge

Allgemein: Y Indikator, $E[Y] = \text{Prob}[Y=1]$

für X haben wir jetzt:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_m$$

$$E[X_i] = p = \text{Prob}[X_i = 1]$$

(für alle i wegen Unabhängigkeit)

$$\Rightarrow \underline{\underline{E[X] = m \cdot p}}$$

$\blacksquare$

19.04.
2018

Markov-Ungleichung

$Y > 0$ Zufallsvar. , $a > 0$

$$\text{Prob}[Y \geq a] \leq \frac{E[Y]}{a}$$

sinnvoll für $a \gneqq E[Y]$

Bei obigem binomial verteilten X:

$$\text{Prob}[X \geq 3 \cdot p \cdot m] \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Prob}[X = m] = \text{Prob}[X \geq m] \leq p$$

Markov nicht verbesserbar (in dieser allgemeinen Situation)

Bsp.: $\Omega = \{ \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{m \text{ Stück}}, \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{m \text{ Stück}} \}$

$\text{Prob}[(0, \ldots, 0)] = (1-p)$, $\text{Prob}[(1, \ldots, 1)] = p$

$X(b_1, \ldots, b_m) = \#\text{Einsen}$

$E[X] = m \cdot p$

$$\text{Prob}[X = m] = p = \frac{E[X]}{m}$$

$$\text{Prob}[X \geq m] \leq \frac{E[X]}{m} = p$$

Zu Binomialkoeffizienten

$$1 = \binom{0}{0}$$

$$1 = \binom{1}{0} \qquad 1 = \binom{1}{1}$$

$$1 = \binom{2}{0} \qquad 2 = \binom{2}{1} \qquad 1 = \binom{2}{2}$$

$$1 = \binom{3}{0} \qquad 3 = \binom{3}{1} \qquad 3 = \binom{3}{2} \qquad 1 = \binom{3}{3}$$

$$1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1$$

$$1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1$$

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} \qquad m > k > 1$$

$\{1, \dots, m\}$

m dabei — m nicht dabei

$k-1$ Elemente aus $\{1, \dots, m-1\}$ — k Elemente aus $\{1, \dots, m-1\}$

- m gerade, dann $\binom{m}{\frac{m}{2}}$ das eindeutige Maximum
- m ungerade, dann $\binom{m}{\frac{m-1}{2}} = \binom{m}{\frac{m+1}{2}}$ die beiden Maxima.

↳ Induktiv über m mit Pascal'schem Dreieck.

<u>m gerade</u>, $m-1$ ungerade.

Betrachten $\binom{m-1}{k}$

$$\binom{m-1}{k} \quad \underset{k=0}{1} \quad < \quad \underset{k=\frac{m-1-1}{2}}{\circ} \quad \underset{k=\frac{m}{2}}{\bullet} \quad > \dots 1$$

Maxima nach Induktion.

19.04.2018

$\binom{m}{k}$:

$$\binom{m}{\frac{m}{2}} = \binom{m-1}{\frac{m}{2}-1} + \binom{m-1}{\frac{m}{2}}$$

Die beiden Maxima von oben!

<u>m ungerade:</u>

$$m-1 \quad < \quad k = \frac{m-1}{2} \quad >$$

Brauchen noch Monotonie!