03.05.2018

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Algorithmik
Sommersemester 2018

2. Übung

$$\mathrm{Prob}\left[\,|X - EX| \geq a\,\right] = \mathrm{Prob}\left[(X - EX)^2 \geq a^2\right]$$

$$\leq \frac{E[(X - E[X])^2]}{a^2} = \frac{E[X^2] - E[X]^2}{a^2}$$

$a = \varepsilon \cdot E[X]$ $\qquad$ $\varepsilon^2 \cdot E[X]^2$

(X binomial mit n, $\cancel{d}$ und $\frac{1}{2}$)

Gesetz d. großen Zahlen.

Satz: Sei $G = (V, E)$ beliebiger Graph, $\frac{n \cdot d}{2} = \#$Kanten, $d \geq 1$.

Maximal unabhängige Menge? Wie groß mindestens?

#Knoten in max. unabh. Menge $\geq \frac{n}{2 \cdot d}$.

$d_1 = \#$Nachbarn von 1

$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2 \cdot |E|$

$|E| = \frac{\sum d_i}{2}$

$|E| = \frac{n \cdot d}{2} \Leftrightarrow d_1 + \ldots + d_n = n \cdot d$

Wahrscheinlichkeitsraum: Ziehen an jedem Knoten mit Wahrscheinlichkeit p (später).

Raum auf 0-1-Folgen der Länge n

$\mathrm{Prob}[b_1 \ldots b_n] = p^{\#\text{Einsen}} (1-p)^{\#\text{Nullen}}$

$\hat{=}$ Teilmenge von Knoten.

Statt $b_1 \dots b_n$ auch $S \subseteq \{1, \dots, n\}$

Zufallsvariable: $X(S) = \#S \quad (\approx p \cdot n)$

$Y(S) = \#$Kanten von $\mathcal{G}$ in S

$\mathcal{G}$ fest.

Beachte: E ist fest. Für $e = \{i,j\} \in E$, $i \neq j$

$$Y_e(S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i,j \in S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zufällige Teilmenge d. Knoten

$$Y = \sum_{e \in E} Y_e \qquad E[Y_e] = \text{Prob}[Y_e = 1] = p^2$$

$$E[Y] = \frac{n \cdot d}{2} \cdot p^2 = |E| \cdot p^2$$

$$E[X] = n \cdot p$$

$$E[\underbrace{X - Y}_{\#\text{Knoten} - \#\text{Kanten}}] = n \cdot p - \frac{nd}{2} \cdot p^2$$

S unabhängig $\Leftrightarrow X(S) - Y(S) = X(S) \Leftrightarrow Y(S) = 0$

Setze $p = \frac{1}{d}$, $d \geq 1$ dann:

$$E[X - Y] = \frac{n}{d} - \frac{nd}{2} \cdot \frac{1}{d^2} = \frac{n}{d} - \frac{n}{2d} = \underline{\underline{\frac{n}{2d}}}$$

(p so, dass $E[X-Y]$ möglichst groß)

$E[X-Y] = \frac{n}{2d} \Rightarrow$ Es gibt $S \subseteq$ Knoten so dass

$\#S - \#$Kanten in $S \geq \frac{n}{2d}$.

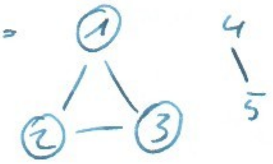
Lassen pro Kante einen Knoten weg.

Dann keine Kanten mehr, haben höchstens

Kanten viele Knoten weggelassen.

$\Rightarrow \underbrace{X(S')}_{\text{unabh. menge.}} - \underbrace{Y(S')}_{=0}$ wird nicht kleiner!

Zu den Y_e: z.B. $G =$



$\text{Prob}[Y_e = 1] = p^2$

$Y_{1,2} \quad Y_{2,3} \quad Y_{1,3}$

- $\text{Prob}[Y_{1,2} = Y_{2,3} = Y_{1,3} = 1] = p^3 \geq (p^2)^3$

  Abhängigkeit!

- $\text{Prob}[Y_{1,2} = Y_{2,3} = 1] = p^3$

<u>Satz:</u> Zufallsgraph mit Kantenwahrscheinlichkeit

$p = p(n) \to 0$

(etwa $p = \frac{c}{n}$, $p = \frac{c}{\sqrt{n}}$)

Wahrscheinlichkeit $\mathcal{G}$ hat eine 4-Clique  $\to 1$

wenn $p \geq \frac{f(n)}{n^{4/3}}$ $\quad f(n) \to \infty$ beliebig

$\to 0$ wenn $p \leq \frac{1}{f(n) \cdot n^{2/3}}$.

<u>Beweis:</u> Für jede 4er Menge von Knoten (alle Kandidaten) $S \subseteq$ Knoten.

$$X_S = \begin{cases} 1 & \text{4 Clique auf } S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Prob}[X_S = 1] = p^6$$

$X = \#$ 4-Cliquen in $\mathcal{G}$ $\quad X = \sum_S X_S$

$$E[X] = \binom{n}{4} \cdot p^6$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \cdot p^6 = \frac{n^4 \cdot p^6}{24}(1 + o(1))$$

$$\frac{n^4 p^6}{24} \to 0 \Leftrightarrow p^6 = o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$p^6 \cdot n^4 \to 0 \Leftrightarrow p^6 \cdot n^4 = o(1) \Leftrightarrow p^6 = \frac{o(1)}{n^4} = o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)^6 = \frac{1}{n^4}$$

$$E[X] \to 0 \Leftrightarrow p = o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)$$

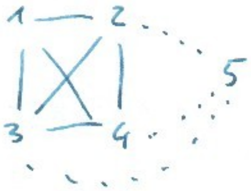
$$E[X] \to \infty \Leftrightarrow p = \omega\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) \Leftrightarrow p = \frac{f(n)}{n^{2/3}} \quad f(n) \to \infty$$

$$E[X] \to 0 \Rightarrow \text{Prob}[X \geq 1] \leq \frac{E[X]}{1} \to 0$$

↑ Markov.

$$\text{Prob}[\underbrace{X_{\{1,2,3,4\}} = 1}_{p^6} \wedge \underbrace{X_{\{2,3,4,5\}} = 1}_{p^6}] = p^6 \cdot p^3 = p^9 \gneqq p^{12}$$

Abhängig!!!



X_S und X_T sind abhängig voneinander

$\Leftrightarrow$ Es gibt Paare $\{i,j\}$, $i,j \in S \cap T$.

(so häufig sollte das unter allen S nicht auftreten)

<u>Intuition:</u> Zu festem $S = \{1,2,3,4\}$ sind wieviele Abhängige? etwa $\binom{n}{2} \cdot 4$

etwa (n^2).

Relativ wenig von n^4.

$\Rightarrow$ Rechnen $E[(X - E[X])^2]$ aus!

$$E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - \underbrace{E[X]^2}_{\left(\frac{n^4 p^6}{24}\right)^2}$$

$$E[X^2] = \sum_S \sum_T E[X_S \cdot X_T]$$

$\text{Prob}[X_S \cdot X_T = 1] = \ ?$

1. Fall: $S = T$ $\quad E[X_S \cdot X_T] = E[X_S] = p^6$

Beitrag zur Summe:

$$\binom{n}{4} \cdot p^6 = E[X]$$

2. Fall $|S \cap T| \overset{\leq 1}{\cancel{= \emptyset}}$ $\quad E[X_S \cdot X_T] = p^6 \cdot p^6$

Beitrag zur Summe: $\underbrace{\binom{n}{4}}_{S}\left(\underbrace{\binom{n-4}{4}}_{S \cap T = \emptyset} + \underbrace{\binom{n-4}{3} \cdot 4}_{|S \cap T| = 1}\right) \cdot p^{12}$

$$= E[X] \cdot E[X] \cdot (1 + o(1))$$

$$= E[X]^2 \cdot (1 + o(1))$$

Rest: ... (in der nächsten Übung!)