17.05.2018

# Wahrscheinlichkeitsrechnung und Algorithmik
## Sommersemester 2018

### 3. Übung

Zufallsgraph mit Wahrscheinlichkeit $p(n) = \frac{1}{n^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$,

$\#$ Nachbarn eines Knotens $\approx n^{1/3}$

$\left( p(n) = \frac{c}{n},\ \text{E-Wert } \# \text{Kanten} = \frac{c}{2n}(n(n-1)) \approx \frac{c}{2} n \right)$

Weiter von Übung 2: $X = \#\ 4\text{-Cliquen}$

$$X = \underbrace{X_{\{1,2,3,4\}} + X_{\{1,2,3,5\}} + \ldots}$$

$\binom{n}{4}$ Summanden, für jede 4er Teilmenge einer.

$$E[X] = \binom{n}{4} \cdot \cancel{p^6}\, q(n)^6 \approx \frac{n^4\, \cancel{p^6}\, q(n)^6}{24}$$

$(q(n)$ Kantenwkt.$)$

- $q(n) = \frac{p(n)}{f(n)} = \frac{1}{f(n)\, n^{2/3}}$,

dann $E[X] = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \cdot \frac{1}{f(n)^6} \cdot \frac{1}{n^4} \to 0$

$\Rightarrow \text{Prob}[X \geq 1] \leq \frac{E[X]}{1} \to 0$

$\{g;\ X(g) \geq 1\} = \{g;\ X_{\{1,2,3,4\}}(g) \geq 1\} \cup \ldots \cup \{g;\ X_{\{n-3,n-2,n-1,n\}}(g) \geq 1\}$

$\text{Prob}[X \geq 1] \leq \binom{n}{4} \text{Prob}[X_S \geq 1]$, da

$\text{Prob}[A \cup B] \leq \text{Prob}[A] + \text{Prob}[B]$

Union-Bound

$n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 - O(n^3)$, d.h.

$n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 - g(n) = n^4(1-o(1))$

für eine Funktion

$0 \le g(n) \le C_1' \cdot n^3$ für ein $C_1'$.

$n^4 \Big(1 - \underbrace{\frac{g(n)}{n^4}}_{\to 0}\Big)$

- $q(n) = p(n) \cdot f(n)$

$$E[X] = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \cdot f(n)^6 \cdot \frac{1}{n^4}$$

$$= \frac{1+o(1)}{24} \cdot f(n)^6 = \frac{f(n)^6}{24} + \frac{o(1) \cdot f(n)^6}{24} \to \infty$$

$E[X] \to \infty$ heißt noch nicht, daß wir immer eine Clique haben!

<u>Es kann sein (Lotterie Effekt):</u> Wenig Graphen mit ganz vielen Cliquen, viele Graphen ohne Cliquen.

- Alle Kanten vorhanden, $\binom{n}{4}$ Cliquen

$E[X] = f(n)^6$ für $\mathrm{Prob}[X = f(n)^6] = 1$ aber

auch bei $\mathrm{Prob}[X = n] = \frac{f(n)^6}{n}$,

$\mathrm{Prob}[X = 0] = 1 - \frac{f(n)^6}{n}$

17.05.
2018

Varianz (für das Bsp. oben)

$$V[x] = E[x^2] - \underbrace{(E[x])^2}_{f(n)^{12}}$$

$$E[x^2] = 0 \cdot \left(1 - \frac{f(n)^6}{n}\right) + n^2 \cdot \frac{f(n)^6}{n} = n \cdot f(n)^6$$

$$V[x] = \overbrace{f(n)^6}^{E[x]} \left(n - f(n)^6\right)$$

$$\gg E[x]^2$$

$$Prob[x=0] = Prob[\,|x - E[x]| = E[x]\,]$$

$$= Prob[(x - E[x])^2 = E[x]^2]$$

$$\# \quad E[(x - E[x])^2]$$

$$\leq Prob[(x - E[x])^2 \geq E[x]^2]$$

$$\leq \frac{E[(x - E[x])^2]}{E[x]^2} = \frac{V[x]}{E[x]^2}$$

da $V[x] \gg E[x]^2$ bringt das nichts!
(haben nur $Prob[x=0] \leq 1$)

<u>für die 4-Cliquen:</u> $V[x] = o\left(E[x]^2\right) = g(n) \cdot E[x]^2$

$g(n) \to 0$

das sollte herauskommen!

$$V[x] = E[x^2] - E[x]^2$$

$$= E[x^2] + o\left(E[x]^2\right)$$

$$= E[x^2]\left(1 + o(1)\right)$$

<u>$E[x^2]$ ausrechnen:</u>

$$X^2 = \left(X_{\{1,2,3,4\}} + \dots\right) \cdot \left(X_{\{1,2,3,4\}} + \dots\right)$$

$$= X + \sum_S \sum_{T \neq S} \underbrace{x_S \cdot x_T}_{\text{0-1-Wertig}} \qquad S, T \subset \{1, \dots, n\}, \; |S|, |T| = 4$$

$$E[x^2] = E[x] + \sum_S \sum_{T \neq S} E[x_S \cdot x_T]$$

<u>$\mathrm{Prob}\,[x_S \cdot x_T = 1] = ?$</u>

<u>1. Fall:</u> $|S \cap T| \leq 1$

$$\mathrm{Prob}\,[x_S \cdot x_T = 1] = q(n)^6 \cdot q(n)^6 = q(n)^{12}$$

<u>Beitrag zur Summe:</u>

$$q(n)^{12} \cdot \underbrace{\binom{n}{4}}_{S} \cdot \left( \underbrace{\binom{n-4}{4}}_{S \cap T = \emptyset} + \underbrace{4 \cdot \overbrace{\binom{n-4}{3}}^{O(n^3)}}_{|S \cap T| = 1} \right) \approx \binom{n}{4}^2 q(n)^{12}$$

$$\approx \underbrace{\left(\binom{n}{4} q(n)^6\right)^2}_{E[x]^2}$$

17.05.
2018

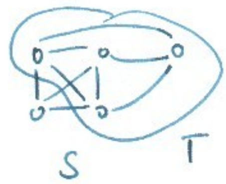
<u>2. Fall:</u> $|S \cap T| = 2$

<u>Beitrag:</u> $\underbrace{\binom{n}{4}}_{S} \cdot \underbrace{6}_{\text{Kante}} \cdot \underbrace{\binom{n-4}{2}}_{\text{Rest}} \cdot \underbrace{q(n)^{11}}_{\substack{\text{11 Kanten,} \\ \text{1 gemeinsam}}}$

$$\approx n^6 \cdot q(n)^{11} = o\left(E[x]^2\right)$$

<u>3. Fall:</u> $|S \cap T| = 3$

<u>Beitrag:</u> $\binom{n}{4} \cdot 4 \cdot (n-4) \cdot q(n)^9 = o\left(E[x]^2\right)$




<u>4. Fall:</u> $|S \cap T| = 4$

<u>Beitrag:</u> $\binom{n}{4} q(n)^6 = o\left(E[x]^2\right)$

$$E[x^2] = E[x]^2 \left(1 + o(1)\right)$$

$$\text{Prob}\,[x = 0] \leq \frac{E[x^2] - E[x]^2}{E[x]^2}$$

Tschebycheff-Ungleichung

$$= \frac{E[x]^2 \left(1 + o(1)\right) - E[x]^2}{E[x]^2}$$

$$= \underline{\underline{o(1) \to 0}}$$

---

$G$ hat $\frac{n \cdot d}{2}$ Kanten, dann hat $G$ unabhängige Menge $\geq \frac{n}{2d}$ ; $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$.

2n Kanten $\to \alpha(G) = \frac{n}{4}$

Wahrscheinlichkeitsraum auf $\mathcal{P}(V)$, $V$-Menge der Knoten
$V = \{0, 1, \dots, n\}$, d. h. 0-1-Folgen

Ziehen an jedem Knoten mit Wkt. $p$ unabhängig

$S \in \mathcal{P}(V)$ ein ~~etwa~~ Element von $S$.

$X = |S|$ $\qquad$ $Y = \#$ Kanten in $S$

$$Y = \sum_{\substack{e \text{ Kante} \\ \text{in } G}} Y_e \qquad Y(S) = \sum_{e \text{ Kante}} Y_e(S)$$

$$Y_e(S) = \begin{cases} 1 & \text{Kante in } S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$E[Y_e] = p^2$

$E[Y] = \frac{n \cdot d}{2} p^2$

$E[X] = p \cdot n$ $\qquad$ $S$ unabhängig $\Leftrightarrow X(S) - \overbrace{Y(S)}^{=0} = X(S)$

$$X(S) - Y(S) = \underbrace{(X - Y)}_{\text{Zufallsvar.}}(S)$$

17.05.
2018

~~E[X]~~ $E[X-Y] = p \cdot n - \frac{n \cdot d}{2} p^2$

Möglichst groß: $p = \frac{1}{d}$ $(d \geq 1)$

$$E[X-Y] = \frac{1}{d}\left(n - \frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2d}$$

$\Rightarrow$ Also existiert eine Menge S für das gilt: $|S| - \#\text{Kanten in } S \geq \frac{n}{2d}$

- Lösche pro Kante einen Knoten

$\rightsquigarrow$ $|S| - 1 - (\#\text{Kanten in } S - 1) \geq \frac{n}{2d}$