31.05.
2018

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Algorithmik
Sommersemester 2018

4. Übung

$$\left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{E[X]} \leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2 E[X]}$$ für jedes δ: $0\leq\delta<1$.

Zeigen $(1+\delta)^{1+\delta} \geq e^{\delta+\frac{1}{3}\delta^2}$

$$(1+\delta)^{1+\delta} = e^{(\ln(1+\delta))\cdot(1+\delta)}$$

Logarithmenreihe:

$$\ln(1+\delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + \dots$$

$$-1 \leq \delta \leq 1$$

$$(\ln(1+\delta))(1+\delta)$$

$$= \left(\delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} \dots\right)(1+\delta)$$

$$= \left(\delta - \frac{\delta^2}{2} + \dots\right) + \left(\delta^2 - \frac{\delta^3}{2} + \frac{\delta^4}{3} - \frac{\delta^5}{4} + \dots\right)$$

$$= \delta + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{6} + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\delta^4 + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)\delta^5$$

$$+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\delta^6 + \left(\frac{1}{7}-\frac{1}{6}\right)\delta^7$$

$$+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)\delta^8 + \dots$$

$$\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)^{\cancel{i+1}} \delta^{i+1} + \left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+1}\right) \delta^{i+2}$$

$$= \frac{i+1-i}{i(i+1)} \delta^{i+1} + \frac{(i+1)-(i+2)}{(i+2)(i+1)} \delta^{i+2}$$

$$= \frac{1}{i(i+1)} \delta^{i+1} + \frac{-1}{(i+2)(i+1)} \delta^{i+2} > \underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow \left(\ln(1+\delta)\right)(1+\delta) \geq \delta + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{6} \geq \delta + \frac{\delta^2}{3}$$

<u>Herleitung der Logarithmenreihe</u>

$$\ln(1+\delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + \dots$$

Taylor: $$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Sofern $|f^{(n)}(t)| \leq a \cdot C^n$

für eine Konstante C und alle t in dem betrachteten Intervall.

31.05.2018

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$a = 0$$

$$\ln(1+x) = 0 + 1\cdot(x-0) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \ldots$$

$$\ln(1+a) \quad \underbrace{\frac{1}{a+1} = 1}_{f'} \quad \underbrace{-1\,\frac{1}{(1+x)^2}}_{f''} \quad \underbrace{2\cdot\frac{1}{(1+x)^3}}_{f'''}$$

Zufällige Graphen: 3-Färbbarkeit

Ab welcher Kantenanzahl hat ein Zufallsgraph keine 3-Färbung mehr? Mit W-keit $\to 1$.

X = # 3-Färbungen, Zufallsvariable

n Knoten

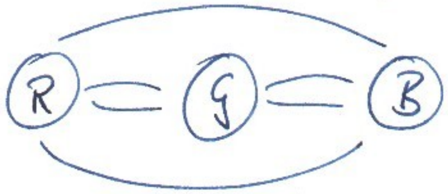
3^n 3-Färbungen

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{3^n}$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Färbung } i \text{ färbt} \\ 0 & \text{Färbung } i \text{ färbt nicht} \end{cases}$$

Wenn $E[X] \to 0$, dann $\mathrm{Prob}[X \geq 1] \leq \frac{E[X]}{1} \to 0$.

$E[X_i] = \mathrm{Prob}[X_i = 1]$ — Gegeben Färbung i, W-keit, dass G richtig gefärbt wird?



erlaubte Kanten!

Annahme: $|R| = |G| = |B| = \frac{1}{3}n$

$$(1-p)^{\binom{n/3}{2}\cdot 3} \leq e^{-p\,\frac{\frac{n}{3}(\frac{n}{3}-1)}{2}\cdot 3}$$

R G B

$$\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \cancel{\tfrac{n}{3}}\binom{n_3}{2} \qquad n_1 + n_2 + n_3 = n$$

Verbotene Kanten

$$\geq \binom{n/3}{2} \cdot 3$$

(unregelmäßige Aufteilung $\rightsquigarrow$ mehr verbotene Kanten!)

für $|R|, |G|, |B|$ nicht alle gleich $\frac{1}{3}n$

gilt: # Verbotene Kanten $\geq$ # verbotene Kanten bei alles $\frac{1}{3}n$

$$(1-p)^{\#\text{Verbotene Kanten für } \cancel{\text{alles } \frac{1}{3}n} \text{ nicht alles } \frac{1}{3}n}$$

$$\leq (1-p)^{\#\text{Verbotene bei alles } \frac{1}{3}n}$$

$$\Rightarrow \text{Prob}[X_i = 1] \leq \exp\left(-p \cdot \frac{\frac{n}{3}(\frac{n}{3}-1)\cdot 3}{2}\right)$$

für alle i

also $E[X] = 3^n \cdot \exp\left(-p\,\frac{n}{3}\left(\frac{n}{3}-1\right)\frac{3}{2}\right) \to 0$?!

31.05.
2018

$$(\ln 3)\cdot n - p\,\frac{n}{3}\left(\frac{n}{3}-1\right)\cdot\frac{3}{2} \overset{!}{\longrightarrow} -\infty$$

Interessant bei $p = \frac{c}{n}$

$$n\cdot(\ln 3) - \frac{c}{3}\left(\frac{n}{3}-1\right)\cdot\frac{3}{2}$$

$$= n\underbrace{\left(\ln 3 - \frac{c}{6}\right)}_{\overset{!}{<}0}\cancel{n} + \frac{c}{2} \overset{!}{\longrightarrow} -\infty$$

$c > 6 \ln 3$ dann nicht mehr 3 färbbar

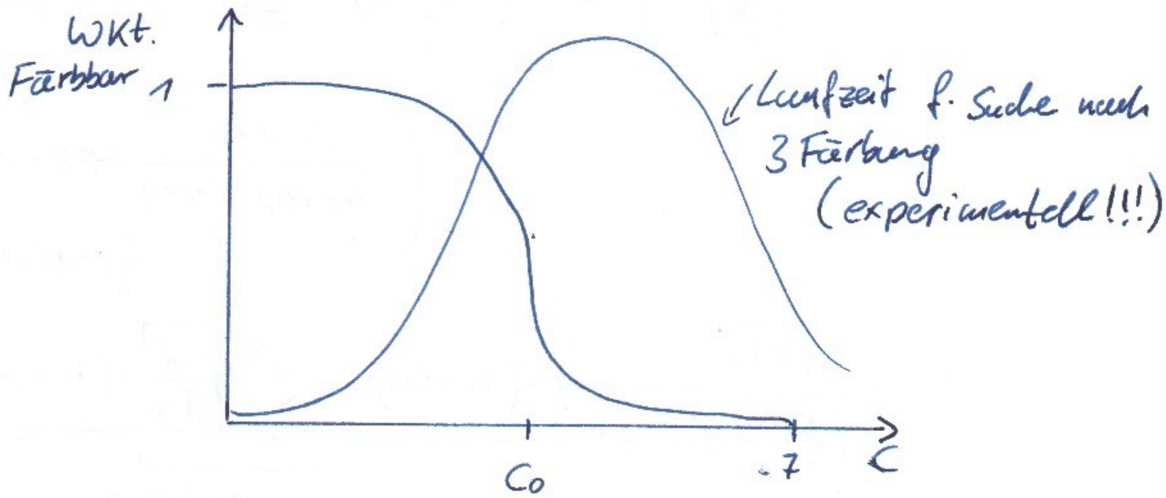
≈ 7 ?

Es gibt ein c_0 so dass gilt:

$c < c_0$ dann 3 färbbar
$c > c_0$ dann nicht 3 färbbar } mit Wkt $\to 1$

(Schwellwert c_0)

c_0 nicht genau bestimmt.



$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

$$n! \le n^n$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \le n!$$

$$\frac{n}{2}\ln(n/2) \le \ln(n!) \le n\cdot \ln(n)$$

$$\frac{n}{2}\cdot \ln n - \frac{n}{2}\cdot \ln 2$$

Stirlingsche Formel

$$n! = \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\cdot\left(1+\underbrace{o(1)}_{\to 0}\right)$$

„größter" Binomialkoeffizient (n gerade)

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

$$= \frac{\left(\frac{n}{\cancel{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+o(1))}{\left(\frac{n/2}{\cancel{e}}\right)^{n/2}\sqrt{2\pi\cdot\frac{n}{2}}\,(1+o(1))\cdot\left(\frac{n/2}{\cancel{e}}\right)^{n/2}\sqrt{2\pi\,\frac{n}{2}}\,(1+o(1))}$$

$$\left(\frac{1+o(1)}{(1+o(1))(1+o(1))} = 1+o(1)\right.$$

Grenzwerte!)

$$= \frac{\sqrt{2\pi n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\sqrt{\pi n}\,\sqrt{\pi n}}\cdot(1+o(1)) = \underbrace{2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}}_{\ge 2^{n-\log_2 n}}\cdot(1+o(1))$$

31.05.
2018

$$\binom{\binom{n}{2}}{\binom{n}{2}/2} = 2^{\binom{n}{2}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi \binom{n}{2}}}}$$

Wkt, Zufallsgraph mit $p = 1/2$ hat genau $\binom{n}{2}/2$ Kanten

$$\approx \frac{1}{n}\sqrt{\frac{4}{\pi}}$$