14.06.2018

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Algorithmik

Sommersemester 2018

5. Übung

Local Lemma

K-Konjunktive Normalform (hier: genau K ~~Literal~~ Literale pro Klausel, alle Lit. einer Klausel verschieden)

$T_F(C) = \{ D \mid D$ Klausel in F ohne C selbst, C und D haben gemeinsame Variablen$\}$

$\# T_F(C) = \frac{2^K}{e} - 1$

für alle C aus F, dann hat F eine erfüllende Belegung.

$2^K - 1 = \# T_F(C)$, $K=3$

$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \ldots \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$

$\Rightarrow$ nicht erfüllbar!

<u>Beweis:</u> F gegeben, über Variablen $x_1, \dots, x_n$

$$\alpha : \{x_1, \dots, x_n\} \to \{0, 1\}$$

2^n viele Belegungen α

$$\mathrm{Prob}[\alpha] = \frac{1}{2^n}$$

<u>Für F gilt:</u>

Ist $\mathrm{Prob}[\alpha ; \alpha \text{ macht } F \text{ wahr}] \neq 0$, dann gibt es wahr machendes α.

<u>Zeigen jetzt folgendes:</u> Für jede Teilformel F' von F. F hat genau M verschiedene k-Klauseln, F' hat $\leq M-1$ Klauseln und jede Klausel C in F und nicht in F' gilt:

$$\mathrm{Prob}[\alpha ; \alpha \text{ macht } C \wedge F' \text{ wahr}]$$
$$\geq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right) \cdot \mathrm{Prob}[\alpha ; \alpha \text{ macht } F' \text{ wahr}]$$

Dann $\mathrm{Prob}_\alpha[C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_M = F \text{ wahr}]$

$$\geq \cancel{\mathrm{Prob}} \left(1 - \frac{e}{2^k}\right) \cdot \mathrm{Prob}_\alpha[C_2 \wedge \dots \wedge C_M]$$
$$\geq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right)^2 \cdot \mathrm{Prob}[C_3 \wedge \dots \wedge C_M]$$
$$\dots$$
$$\geq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right)^{M-1} \cdot \underbrace{\mathrm{Prob}_\alpha[C_M]}_{= 1 - \frac{1}{2^k}} \geq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right)^M \neq 0$$

②

14.06.
2018

<u>Bsp.:</u> • $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (y_1 \vee \neg y_2 \vee y_3)$

Wahr mit Wkt. $\left(\frac{7}{8}\right)^2$

• $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$

Wahr mit Wkt. $\frac{6}{8}$

$\frac{6}{8} < \left(\frac{7}{8}\right)^2$

$\# \Gamma = 1$

$\frac{8}{e} - 1 > 1$ ✓ Local Lemma erfüllt.

$\frac{6}{8} \geq \left(1 - \frac{e}{8}\right)^2$ muß gelten (ausrechnen!)

<u>Zum Beweis:</u> Induktion über die # Klauseln von F'.

Klauseln $F' = \emptyset$:

$$\mathrm{Prob}_\alpha[G] \geq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right) \cdot \underbrace{\mathrm{Prob}_\alpha[\phi]}_{=1}$$

gilt, da $\mathrm{Prob}_\alpha[G] = 1 - \frac{1}{2^k} \geq 1 - \frac{e}{2^k}$

für jedes G.

<u>Induktionsschluß:</u> F' mit mindestens ~~#4~~ 1 und maximal M-1 Klauseln.

Behauptung gilt für alle H, Teilformel mit ~~echt~~ echt weniger Klauseln als F!

Also Behauptung für F' zu zeigen!

G Klausel von F, nicht in F'.
Wie sieht $G \wedge F'$ aus? Sei

$$\Gamma_{F' \wedge G}(G) = \Gamma_{F'}(G)$$
$$= \{G_1, \dots, G_l\} \subseteq \Gamma_F(G)$$

Also ist $0 \leq l \leq \frac{2^k}{e} - 1.$

$$\Rightarrow \quad G \wedge F' = G \wedge \underbrace{G_1 \wedge \dots \wedge G_l}_{\text{gemeinsame Var. mit } G} \wedge \underbrace{F''}_{\text{hier keine Var. von } G\,!}$$

<u>1. Fall:</u> $l = 0$ $\quad \mathrm{Prob}_\alpha[G \wedge F'] = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdot \mathrm{Prob}_\alpha[F']$

$$\leq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right) \cdot \mathrm{Prob}_\alpha[F']$$

<u>2. Fall:</u> $1 \leq l \leq \frac{2^k}{e} - 1$

$$G \wedge \underbrace{G_1 \wedge \dots \wedge G_l \wedge F''}_{F'}$$

$$\mathrm{Prob}_\alpha[G \wedge F''] = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdot \mathrm{Prob}_\alpha[F'']$$

$$\mathrm{Prob}[\alpha, \alpha \text{ macht } G \text{ falsch und } F'' \text{ wahr}]$$
$$= \frac{1}{2^k} \cdot \mathrm{Prob}_\alpha[F'']$$

11.06.2018

$$\text{Prob}[C_l \wedge F''] \geq \left(1-\frac{e}{2^k}\right)\cdot \text{Prob}_\alpha[F'']$$

$$\text{Prob}[C_{l-1} \wedge (C_l \wedge F'')] \geq \left(1-\frac{e}{2^k}\right)\cdot \text{Prob}_\alpha[C_l \wedge F'']$$

$$\geq \left(1-\frac{e}{2^k}\right)^2 \cdot \text{Prob}_\alpha[F'']$$

$$\Rightarrow \text{Prob}[\underbrace{C_1 \wedge \ldots \wedge C_l \wedge F''}_{F'}] \geq \left(1-\frac{e}{2^k}\right)^l \cdot \text{Prob}_\alpha[F'']$$

$$\left(l \leq \frac{2^k}{e} - 1\right)$$

$$\geq \left(1-\frac{e}{2^k}\right)^{\frac{2^k}{e}-1} \cdot \text{Prob}[F''] \geq \frac{1}{e}\cdot \text{Prob}[F'']$$

denn: $\left(x = \frac{2^k}{e}\right)$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-1} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{\frac{x}{x-1}}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{\frac{x-1+1}{x-1}}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}\right)^{x-1} \geq \frac{1}{e}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &(1+a) \leq e^a \quad a \in \mathbb{R} \\ &\left(1+\frac{1}{a}\right)^a \leq e \\ &\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^a} \geq \frac{1}{e} \end{aligned}}$$

Haben jetzt:

- $\mathrm{Prob}_\alpha[C_1 \wedge \ldots \wedge C_\ell \wedge F''] \geq \frac{1}{e} \cdot \mathrm{Prob}_\alpha[F'']$
- $\mathrm{Prob}_\alpha[C \wedge F''] = (1 - \frac{1}{2^k}) \cdot \mathrm{Prob}_\alpha[F'']$
- $\mathrm{Prob}[\alpha;\alpha \text{ macht } C_1 \text{ falsch und } F'' \text{ wahr}]$
  $= \frac{1}{2^k} \cdot \mathrm{Prob}_\alpha[F'']$

Wollen haben:

$$\mathrm{Prob}_\alpha[C_1 \wedge F'] \geq \left(1 - \frac{e}{2^k}\right) \cdot \mathrm{Prob}[F']$$

~~Es gilt immer~~ $\cancel{\underbrace{\mathrm{Prob}_\alpha[F']}_{\text{Kennen wir: } \geq \frac{1}{e}\mathrm{Prob}_\alpha[F'']} = \overbrace{\mathrm{Prob}_\alpha[C \wedge F']}^{\text{gesucht!}} + \underbrace{\mathrm{Prob}[\alpha \text{ macht } C_1 \text{ falsch und } F' \text{ wahr}]}_{[illegible]}}$

Ziel: $\mathrm{Prob}_\alpha[C \wedge F'] \geq (1 - \frac{e}{2^k}) \cdot \mathrm{Prob}_\alpha[F']$

$\Leftrightarrow \mathrm{Prob}[\alpha \text{ macht } C_1 \text{ falsch und } F' \text{ wahr}]$

$\leq \frac{e}{2^k} \cdot \mathrm{Prob}_\alpha[F']$

da $\mathrm{Prob}[F'] = \mathrm{Prob}[C_1 \wedge F'] +$

$\mathrm{Prob}[C_1 \text{ falsch und } F' \text{ wahr}]$

14.06.
2018

Prob[C falsch und F'' wahr]

$$= \frac{1}{2^k} \cdot \text{Prob}[F''] \leq \frac{e}{2^k} \cdot \text{Prob}[F']$$

$$\text{Prob}[F'] \geq \frac{1}{e} \cdot \text{Prob}[F'']$$

Brauchen: Prob[C' falsch und F' wahr] $\leq \frac{e}{2^k} \cdot \text{Prob}[F']$

$$\text{Prob}[F''] \leq e \cdot \text{Prob}[F']$$

Nochmal:

$$\text{Prob}_\alpha[F'] = \text{Prob}_\alpha[C \wedge F'] + \text{Prob}_\alpha[C' \text{ falsch} \wedge F']$$

$$\text{Prob}[F'] \geq \frac{1}{e} \text{Prob}[F'']$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{Prob}[F''] \leq e \cdot \text{Prob}[F']$$

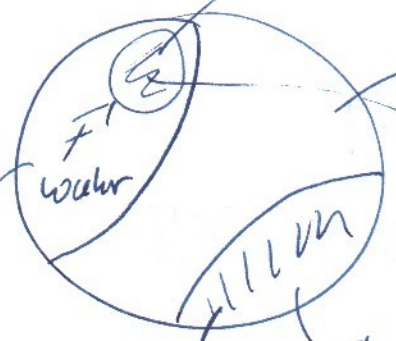
$$\text{Prob}[C \text{ falsch und } F'] \leq \text{Prob}[C \text{ falsch und } F'']$$

$$\leq \frac{e}{2^k} \text{Prob}[F']$$

$$\text{Prob}[C \wedge F'] \geq \text{Prob}[F'] - \frac{e}{2^k} \text{Prob}[F']$$

$$= \left(1 - \frac{e}{2^k}\right) \text{Prob}[F']$$

wenn C falsch hier liegt. ist Prob[...] maximal



F'' wahr

$\geq \frac{1}{e}$

$\frac{1}{2^k}$ von allen

$\leq \frac{1/2^k}{1/e} \leq \frac{e}{2^k}$

G falsch

Prob [C falsch und F'] = 0
falls C falsch hier.