Prof. Dr. A. Goerdt
A. Oertel

TU Chemnitz
Sommersemester 2020
22. Mai 2020

Einführung Quantencomputing

Lösungen zur 3. Übung

Aufgabe 1: Wir betrachten 2 Qubits mit folgendem Zustand.

$$\frac{1}{2}\sum_{b_i=0,1} a_{b_1b_2}\left|b_1b_2\right\rangle \text{ mit } a_{b_1b_2} = -1, 1$$

Wie müssen die $a_{b_1b_2}$ gewählt werden, damit der Zustand verschränkt ist?

Lösung 1: Darstellung als

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{pmatrix}.$$

Für Verschränktheit darf folgende Zerlegung nicht existieren:

$$\begin{aligned} a_{00} &= x_0y_0 \\ a_{01} &= x_0y_1 \\ a_{10} &= x_1y_0 \\ a_{11} &= x_1y_1 \end{aligned}$$

Dabei beobachten wir, dass $x_{b_1}, y_{b_2} = -1, 1$.
Dadurch lässt sich erkennen, dass Zustände mit einer 1 verschränkt sind, da für diesen Eintrag $a_{ij} = 1$ gilt

$$x_i = y_j \neq x_{(\neg i)} = y_{(\neg j)},$$

wodurch $a_{(\neg i \neg j)} = a_{ij}$.
Weiterhin ist der Zustand mit einer -1 verschränkt, da für den $a_{ij} = -1$ gilt

$$y_{(\neg j)} = x_i \neq y_j = x_{(\neg i)},$$

wodurch $a_{(\neg i \neg j)} = a_{ij}$.
Bei zwei gleichen Stellen ist der Zustand **nicht** verschränkt, da für die Einträge

$$a_{ij} = x_iy_j = -1 = x_ky_\ell = a_{k\ell}$$

entweder sind zwei Indices gleich (z.B. $x_i = x_k$), welche dann -1 gewählt werden und Rest ist 1. Oder alle Indices sind unterschiedlich, dann wird für a_{ij}, $x_i = -1$ und $y_j = 1$ gewählt und für $a_{k\ell}$, $x_k = 1$ und $y_\ell = -1$.

Aufgabe 2: Wir betrachten 3 Qubits in der Reihenfolge 123. Gegeben sei eine Matrix A auf 2 Qubits und eine Matrix B auf einem Qubit. Beide Matrizen sind orthogonal. Ebenso sind der Zustand $|a\rangle$ auf 2 Qubits und der Zustand $|b\rangle$ auf ein Qubit gegeben.

(a) Berechnen Sie die Kronecker-Produkte. Dabei bedeutet $A \;{}_{xy}{\otimes}_z\; B$, dass A auf die Bits xy und B auf das Bit z wirkt.

Beobachten Sie, dass die Ergebnis-Matrix des Kronecker-Produktes orthogonal ist.

(i) $A \;{}_{12}{\otimes}_3\; B$ (ii) $A \;{}_{13}{\otimes}_2\; B$

(b) Berechnen Sie die Tensorprodukte. Dabei bedeutet $|a\rangle \;{}_{xy}{\otimes}_z\; |b\rangle$, dass $|a\rangle$ auf die Bits xy und $|b\rangle$ auf das Bit z wirkt.

(i) $|a\rangle \;{}_{12}{\otimes}_3\; |b\rangle$ (ii) $|a\rangle \;{}_{13}{\otimes}_2\; |b\rangle$

Lösung 2:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} a_{00,00} & a_{00,01} & a_{00,10} & a_{00,11} \\ a_{01,00} & a_{01,01} & a_{01,10} & a_{01,11} \\ a_{10,00} & a_{10,01} & a_{10,10} & a_{10,11} \\ a_{11,00} & a_{11,01} & a_{11,10} & a_{11,11} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} \end{pmatrix}$$

(i)

$$\begin{pmatrix} a_{00,00}b_{0,0} & a_{00,00}b_{0,1} & \cdots & a_{00,11}b_{0,0} & a_{00,11}b_{0,1} \\ a_{00,00}b_{1,0} & a_{00,00}b_{1,1} & \cdots & a_{00,11}b_{1,0} & a_{00,11}b_{1,1} \\ \vdots & \vdots & a_{12,12}b_{3,3} & \vdots & \vdots \\ a_{11,00}b_{0,0} & a_{11,00}b_{0,1} & \cdots & a_{11,11}b_{0,0} & a_{11,11}b_{0,1} \\ a_{11,00}b_{1,0} & a_{11,00}b_{1,1} & \cdots & a_{11,11}b_{1,0} & a_{11,11}b_{1,1} \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} a_{00,00}b_{0,0} & a_{00,01}b_{0,0} & \cdots & a_{00,10}b_{0,1} & a_{00,11}b_{0,1} \\ a_{01,00}b_{0,0} & a_{01,01}b_{0,0} & \cdots & a_{01,10}b_{0,1} & a_{01,11}b_{0,1} \\ \vdots & \vdots & a_{13,13}b_{2,2} & \vdots & \vdots \\ a_{10,00}b_{1,0} & a_{10,01}b_{1,0} & \cdots & a_{10,10}b_{1,1} & a_{10,11}b_{1,1} \\ a_{11,00}b_{1,0} & a_{11,01}b_{1,0} & \cdots & a_{11,10}b_{1,1} & a_{11,11}b_{1,1} \end{pmatrix}$$

(b)

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{pmatrix}$$

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

(i)

$$\begin{pmatrix} a_{00}b_0 \\ a_{00}b_1 \\ a_{01}b_0 \\ a_{01}b_1 \\ a_{10}b_0 \\ a_{10}b_1 \\ a_{11}b_0 \\ a_{11}b_1 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} a_{00}b_0 \\ a_{01}b_0 \\ a_{00}b_1 \\ a_{01}b_1 \\ a_{10}b_0 \\ a_{11}b_0 \\ a_{10}b_1 \\ a_{11}b_1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Wir betrachten den Deutsch-Jozsa-Algorithmus. Berechnen Sie das Kronecker-Produkt

$$H_2 \otimes H_2 \otimes H_2.$$

Leiten Sie daraus eine allgemeine Vorschrift für die Berechnung des Kronecker-Produktes

$$H_2 \otimes \ldots \otimes H_2$$

ab.

Beobachten Sie, dass sich daraus am Ende für den Fall „f ist halb-halb“ eine Amplitude von 0 für den Zustand $|0\ldots0\rangle$ ergibt.

Lösung 3:

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt einfach

$$H_{2^{n+1}} = \begin{pmatrix} H_{2^n} & H_{2^n} \\ H_{2^n} & -H_{2^n} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, H_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, H_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Allgemein ist somit der Eintrag an der Stelle $(b_1 \dots b_n, c_1 \dots c_n)$ gleich $(-1)^{b_1 \cdot c_1 \oplus \dots \oplus b_n \cdot c_n}$. Somit sind die Einträge in der ersten Zeile immer 1. Da bei „f ist halb-halb“ aus der Vorlesung bekannt ist, dass jeder Zustand die gleiche Amplitude von $1/\sqrt{2^n}$ und die Hälfte der Amplituden einen Faktor von -1 und die andere Hälfte einen Faktor von 1 haben. Dadurch verrechnen sich diese Faktoren zu 0, die Faktoren im Gesamtzustand aufsummiert werden für die erste Zeile.

Aufgabe 4: Wir betrachten die folgende Aussage, welche bei Simon's Algorithmus Verwendung findet.
Beweisen Sie, dass für eine feste Bitfolge $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ und die Hälfte der möglichen Bitfolgen $(c_1, \dots, c_n)$ gilt

$$a_1 \cdot c_1 \oplus \dots \oplus a_n \cdot c_n = 0$$

und für die andere Hälfte gilt

$$a_1 \cdot c_1 \oplus \dots \oplus a_n \cdot c_n = 1.$$

Lösung 4: Allgemein gilt für Bits $(x_1 \dots x_n)$, $x_1 \oplus \dots \oplus x_n = 0$, wenn Anzahl der Einsen in $(x_1 \dots x_n)$ gerade ist. Bei ungerade $x_1 \oplus \dots \oplus x_n = 1$. Somit ist nur die Anzahl der Einsen in der Exklusiven-Veroderung relevant. Nullen verändern das Ergebnis nicht und können weggelassen werden.

Der Term $a_i \cdot c_i$ kann nur 1 werden, wenn a_i und c_i Eins sind. Da $(a_1, \ldots, a_n)$ konstant, können nur die Terme $a_i \cdot c_i$ an Stellen i zu Eins werden, wenn $a_i = 1$. Somit müssen nur noch diese Stellen betrachtet werden, wo $a_i = 1$, da restlichen Terme auf jeden Fall 0 sind.
Somit ist alles von den Stellen von $(c_1, \ldots, c_n)$ anhängig, wo $a_i = 1$. Also wird nur eine Teilfolge von $(c_1, \ldots, c_n)$ betrachtet. Damit der Term Eins wird, muss $c_i = 1$ sein. Somit reduziert sich das Problem auf die Anzahl der Einsen in normalen Bitfolgen. Die Anzahl der Einsen sind zur Hälfte gerade und zur anderen Hälfte ungerade, was sich leicht induktiv zeigen lässt, aber auch intuitiv Sinn macht.