Prof. Dr. A. Goerdt
A. Oertel

TU Chemnitz
Sommersemester 2020
19. Juni 2020

Einführung Quantencomputing

Lösungen zur 5. Übung

Aufgabe 1: Stellen Sie ein klassisches Programm auf, welches für 3 Bits feststellt, ob die Anzahl der Einsen gerade (Ergebnisbit 0) oder ungerade (Ergebnisbit 1) ist. Verwenden Sie dazu nur Bitoperationen (z.B. $\vee$, $\wedge$, $\oplus$ ...) und pro Programmzeile nur eine Operation.
Wandeln Sie dieses klassische Programm nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in ein Quantenprogramm um.

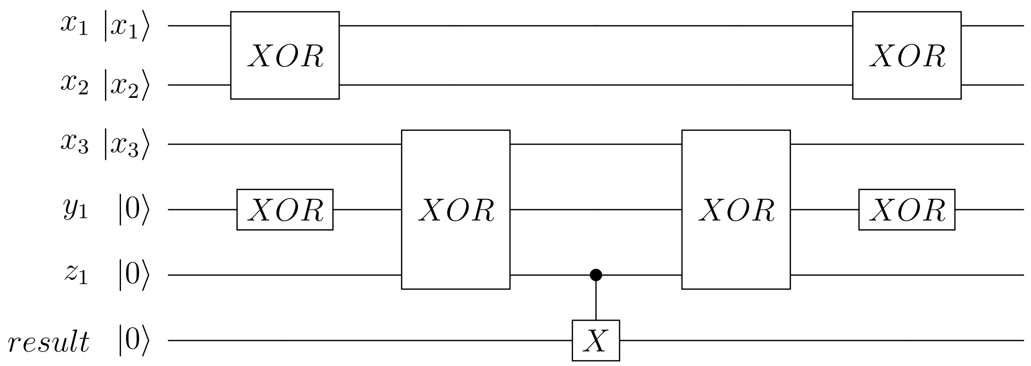
Lösung 1: Wir brauchen nur die $\oplus$ Operation und das Zwischenergebnis y_1. Eingabebits sind $x_1x_2x_3$ und Ergebnisbit ist z_1. Damit ergibt sich das folgende klassische Programm.

$$y_1 \coloneqq x_1 \oplus x_2$$
$$z_1 \coloneqq x_3 \oplus y_1$$

Die Matrix zur Berechnung der Operation $z \coloneqq x \oplus y$ oder $(x, y, z) \mapsto (x, y, z \oplus (x \oplus y))$ sieht folgendermaßen aus.

$$XOR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

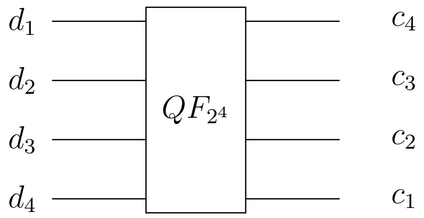
Damit ergibt sich der folgende Schaltkreis.



Aufgabe 2: Wir betrachten die Quanten-Fouriertransformation QF_{2^4} auf 4 Qubits.

(a) Die QF_{2^4} wird auf die Eingabebits $(d_1 d_2 d_3 d_4)$ angewendet. Geben Sie den Zustand nach der Transformation als Tensor an.

(b) Zeichnen Sie den Schaltkreis der Quanten-Fouriertransformation QF_{2^4}. Nutzen Sie den folgenden Schaltkreis als Vorlage.



Lösung 2:

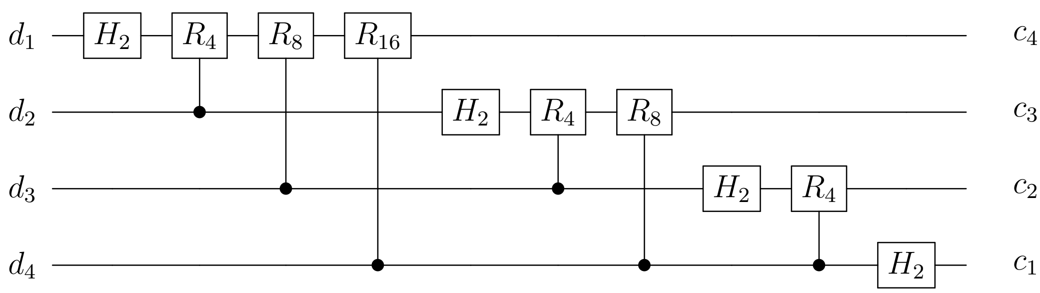
(a) Aus der allgemeinen Formel für die QFT_{2^4}

$$\frac{1}{4} \sum_{c_j=0,1} \exp\Big(\frac{2\pi i}{16}(d_1 d_2 d_3 d_4)_2 \cdot (c_1 c_2 c_3 c_4)_2\Big) \left| c_1 c_2 c_3 c_4 \right\rangle$$

ergibt sich die gesuchte Form

$$\frac{1}{4}\Bigg(\left|0\right\rangle + \exp\Big(\frac{2\pi i}{16}(d_1 d_2 d_3 d_4)_2 \cdot 8\Big) \left|1\right\rangle \otimes \left|0\right\rangle + \exp\Big(\frac{2\pi i}{16}(d_1 d_2 d_3 d_4)_2 \cdot 4\Big) \left|1\right\rangle \otimes$$
$$\left|0\right\rangle + \exp\Big(\frac{2\pi i}{16}(d_1 d_2 d_3 d_4)_2 \cdot 2\Big) \left|1\right\rangle \otimes \left|0\right\rangle + \exp\Big(\frac{2\pi i}{16}(d_1 d_2 d_3 d_4)_2\Big) \left|1\right\rangle \Bigg)$$

(b)



Aufgabe 3: Die Matrix der Fouriertransformation F_{2^n} lässt sich rekursiv aus der Matrix der Fouriertransformation $F_{2^{n-1}}$ herleiten. Dabei wird $F_{2^{n-1}}$ viermal verwendet. Wie wird so die Matrix F_{2^n} hergeleitet und wo ist die $F_{2^{n-1}}$ in F_{2^n} zu finden?

Hinweis: Betrachten Sie die Matrix F_{2^n} und wie die geraden und ungeraden Spalten untereinander zusammenhängen.

Lösung 3: Wir betrachten zuerst die obere Hälfte von F_{2^n}. Die geraden Spalten $\ell = 2j$ entsprechen genau der $F_{2^{n-1}}$, da der Eintag in Spalte ℓ und Zeile k

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{2^n} k \cdot \ell\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{2^n} k \cdot 2j\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{2^{n-1}} k \cdot j\right)$$

was dem Eintrag in Spalte j und Zeile k in $F_{2^{n-1}}$ entspricht. Die ungeraden Spalten ergeben sich somit aus $F_{2^{n-1}}$ und der Multiplikation der Einträge in den Zeilen k mit

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{2^n} k\right).$$

Für die untere Hälfte von F_{2^n} wird auch in die geraden und ungeraden Spalten unterschieden. Die geraden Spalten entsprechen wieder der $F_{2^{n-1}}$, da der Eintag in Spalte ℓ und Zeile $k = 2^{n-1} + o$ für $o = 0, \ldots, 2^{n-1}$

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{2\pi i}{2^n} k \cdot \ell\right) &= \exp\left(\frac{2\pi i}{2^n} (2^{n-1} + o) \cdot 2j\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{2^{n-1}} (2^{n-1} + o) \cdot j\right) \\
&= \exp\left(\frac{2\pi i}{2^{n-1}} 2^{n-1} \cdot j\right) + \exp\left(\frac{2\pi i}{2^{n-1}} o \cdot j\right) \\
&= \exp\left(\frac{2\pi i}{2^{n-1}} o \cdot j\right).
\end{aligned}$$

Die ungeraden Spalten ergeben sich diesmal aus $F_{2^{n-1}}$ und Multiplikation der Einträge in den Zeilen k mit

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{2^n} k\right) + \exp\left(\frac{2\pi i}{2^n} 2^{n-1}\right) = -\exp\left(\frac{2\pi i}{2^n} k\right).$$