Prof. Dr. A. Goerdt
A. Oertel

TU Chemnitz
Sommersemester 2020
30. Juni 2020

Einführung Quantencomputing

Lösungen zur 6. Übung

Aufgabe 1: Ermitteln Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Permutationsmatrix

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wo sind diese Eigenvektoren in der Fouriertransformation F_3 zu finden?
Berechnen Sie die Summe der Eigenvektoren, wobei die Eigenvektoren mit ihren jeweiligen Eigenwerten multipliziert werden. Dabei werden die Eigenwerte jeweils mit $k = 0, 1, 2$ potenziert.
Beobachten Sie, dass für eine 2×2 Permutationsmatrix die vorherigen Ergebnisse analog gelten.

Lösung 1: Die Eigenwerte und Eigenvektoren sind

$$\lambda_0 = 1, \Lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \exp\left(\frac{2\pi i}{3} 1\right), \Lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \exp\left(\frac{2\pi i}{3} 2\right), \Lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren sind die Spalten von

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) & \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) \\ 1 & \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) & \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) \end{pmatrix}.$$

Die Summe mit $k = 0$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{3}} 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} 1 \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} 1 \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit $k = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{2\pi i}{3} 1\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{2\pi i}{3} 2\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit $k = 2$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{2\pi i}{3} 2\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{2\pi i}{3} 1\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) \\ 1 \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \exp(\frac{2\pi i}{3} 1) \\ 1 \\ \exp(\frac{2\pi i}{3} 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Summen die Einheitsvektoren.
Für 2×2 sind die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_0 = 1, \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = -1, \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Als Summe ergibt sich dann für $k = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit $k = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind es wieder die Einheitsvektoren.

Aufgabe 2: Wir betrachten das Verfahren zur Bestimmung der Periodenlänge L mit Hilfe der Quantenfouriertransformation. Gegeben sind die Permutationsmatrix M_f, den Eingabezustand $|a_1 \dots a_m\rangle$ und die Eigenvektoren Λ_λ.
Machen Sie sich klar, dass gilt

$$\sum_{d_1 \dots d_n} \sum_{c_1 \dots c_n} \exp\left(\frac{2\pi i}{2^n} \cdot (c_1 \dots c_n)_2 \cdot (d_1 \dots d_n)_2\right) |d_1 \dots d_n\rangle \otimes M_f^{(c_1 \dots c_n)_2} |a_1 \dots a_m\rangle$$
$$= \frac{1}{L} \sum_{\lambda=0}^{L-1} \sum_{d_1 \dots d_n} \sum_{c_1 \dots c_n} \exp\left(\frac{2\pi i}{2^n} \cdot (c_1 \dots c_n)_2 \cdot (d_1 \dots d_n)_2 - \frac{2\pi i}{L} \cdot \lambda \cdot (c_1 \dots c_n)_2\right) |d_1 \dots d_n\rangle \otimes \Lambda_\lambda.$$

Betrachten Sie dazu wie sich das zweite Register mit Hilfe von den Eigenwerten und

$$|a_1 \dots a_m\rangle = \frac{1}{L}(\Lambda_0 + \dots + \Lambda_{L-1})$$

darstellen lässt. Dann können Sie erstmal nur ein Λ_λ betrachten und dadurch auf die gesamte Gleichung schlussfolgern.

Lösung 2: Durch $|a_1 \dots a_m\rangle = 1/L(\Lambda_0 + \dots + \Lambda_{L-1})$ gilt

$$\begin{aligned} M_f^{(c_1\dots c_n)_2} |a_1 \dots a_m\rangle &= \frac{1}{L}\left(M_f^{(c_1\dots c_n)_2}\Lambda_0 + \dots + M_f^{(c_1\dots c_n)_2}\Lambda_{L-1}\right) \\ &= \frac{1}{L}\left(EW_{\Lambda_0}^{(c_1\dots c_n)_2}\Lambda_0 + \dots + EW_{\Lambda_{L-1}}^{(c_1\dots c_n)_2}\Lambda_{L-1}\right), \end{aligned}$$

wobei EW_{Λ_λ} der Eigenwert zu Λ_λ ist.
Wir betrachten ein festes Λ_λ

$$\sum_{d_1\dots d_n}\sum_{c_1\dots c_n} \exp\left(\frac{2\pi i}{2^n}\cdot (c_1\dots c_n)_2 \cdot (d_1\dots d_n)_2\right)|d_1\dots d_n\rangle \otimes EW_{\Lambda_\lambda}^{(c_1\dots c_n)_2}\Lambda_\lambda =$$

$$\sum_{d_1\dots d_n}\sum_{c_1\dots c_n} \exp\left(\frac{2\pi i}{2^n}\cdot (c_1\dots c_n)_2 \cdot (d_1\dots d_n)_2\right)\cdot EW_{\Lambda_\lambda}^{(c_1\dots c_n)_2}|d_1\dots d_n\rangle \otimes \Lambda_\lambda =$$

$$\sum_{d_1\dots d_n}\sum_{c_1\dots c_n} \exp\left(\frac{2\pi i}{2^n}\cdot (c_1\dots c_n)_2 \cdot (d_1\dots d_n)_2\right)\cdot \exp\left(-\frac{2\pi i}{L}\lambda (c_1\dots c_n)_2\right)|d_1\dots d_n\rangle \otimes \Lambda_\lambda =$$

$$\sum_{d_1\dots d_n}\sum_{c_1\dots c_n} \exp\left(\frac{2\pi i}{2^n}\cdot (c_1\dots c_n)_2 \cdot (d_1\dots d_n)_2 - \frac{2\pi i}{L}\lambda (c_1\dots c_n)_2\right)|d_1\dots d_n\rangle \otimes \Lambda_\lambda.$$

Daraus ergibt sich durch Betrachtung aller Λ_λ

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda=0}^{L-1}\sum_{d_1\dots d_n}\sum_{c_1\dots c_n} \exp\left(\frac{2\pi i}{2^n}(c_1\dots c_n)_2 (d_1\dots d_n)_2 - \frac{2\pi i}{L}\lambda (c_1\dots c_n)_2\right)|d_1\dots d_n\rangle \otimes \Lambda_\lambda.$$