

## Theoretische Informatik II

### 12. Übung

**1. Aufgabe:** Zeigen Sie, dass das folgende *Subset-Multisum-Problem*  $\mathcal{NP}$ -vollständig ist:

- Gegeben:
  - $n$  positive Zahlen  $\{a_1, \dots, a_n\}$  und
  - eine positive ganze Zahl  $b$ .
- Frage: Kann  $b$  als Summe von den  $a_i$  dargestellt werden, wenn die  $a_i$  beliebig oft verwendet werden dürfen?

*Hinweis:* Die Reduktion für das *Subset-Sum-Problem* kann für das *Subset-Multisum-Problem* angepasst werden. Es müssen dafür sichergestellt werden, dass die Korrekturterme nicht mehrfach verwendet werden. Außerdem sind Überträge ein Problem. Eine Lösung für die Überträge ist es, Spiegelsymmetrische Zahlen zu verwenden.

**2. Aufgabe:** Zeigen Sie, dass das folgende Problem kürzester Wege  $\mathcal{NP}$ -vollständig ist:

- Gegeben:
  - Ein Graph  $G(V, E)$  in dem jede Kante  $e_i$  mit einem Paar  $(x_i, y_i)$  nicht-negativer ganzer Zahlen beschriftet sind,
  - ein Startknoten  $s$ ,
  - ein Zielknoten  $t$  und
  - eine positive ganze Zahl  $k$ .
- Frage: Gibt es einen Pfad  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_j})$  von  $s$  nach  $t$ , sodass sowohl  $\left(\sum_{l=1}^j x_{i_l}\right) \leq k$  als auch  $\left(\sum_{l=1}^j y_{i_l}\right) \leq k$  gelten? Es sollen also für einen „optimalen“ Pfad sowohl die erste als auch die zweite Komponente hinreichend klein sein.

*Hinweis:* Es ist sinnvoll, das Problem auf das *Subset-Sum-Problem* zu reduzieren. Wenn ein  $a_i$  verwendet wird, soll eine Kante  $(a_i, 0)$  im Pfad verwendet werden, ansonsten soll eine Kante  $(0, a_i)$  verwendet werden. Es ist außerdem hilfreich  $(0, 0)$  Kanten zu verwenden.

**3. Aufgabe:** Zeigen Sie, dass das Problem kürzester einfacher Wege in gewichteten Graphen  $\mathcal{NP}$ -vollständig ist, wenn negative Kantengewichte erlaubt sind.

Zeigen Sie außerdem, dass es ein Polynom gibt, sodass das Problem mit dynamischen Programmieren in  $\mathcal{O}(p(n)2^n)$  gelöst werden kann.

**4. Aufgabe:** Zeigen Sie, dass 4-Färbbarkeit  $\mathcal{NP}$ -vollständig ist.