Prof. Dr. A. Goerdt
Julian Pape-Lange

TU Chemnitz
Sommersemester 2021
09.05.2021

Effiziente Algorithmen / Theoretische Informatik III

2. Übung

1. Aufgabe: Wir betrachten die *Binomialbäume* aus der Vorlesung.

(a) Welche Einschränkung hat ein Binomialbaum, der die *Heapeigenschaft* bezüglich der Schlüsselwerte erfüllt, gegenüber einem üblichen Heap?

(b) Zeigen Sie, dass der Binomialbaum B_i genau $\binom{i}{i'}$ der Tiefe i' enthält.

(c) Wie läßt sich auf Basis dieser Bäume eine Datenstruktur aufbauen, die *heapähnliche* Eigenschaften aufweist?

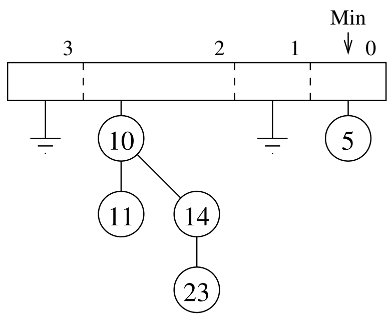
(d) Wie sind die *üblichen Heapoperationen* zu implementieren? Welche Laufzeiten ergeben sich?

(e) Überlegen Sie, welche Operation sich im *binomialen Heap* zusätzlich mit einer *günstigen* Laufzeit realisieren läßt!

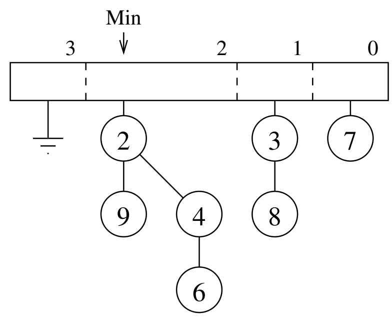
2. Aufgabe: Wir betrachten *binomiale Heaps*, wie in Aufgabe 1 definiert.

(a) Wir betrachten die folgenden zwei *binomialen Heaps* A und B. Führen Sie die Operation `meld(`A`,`B`)` aus.

A :

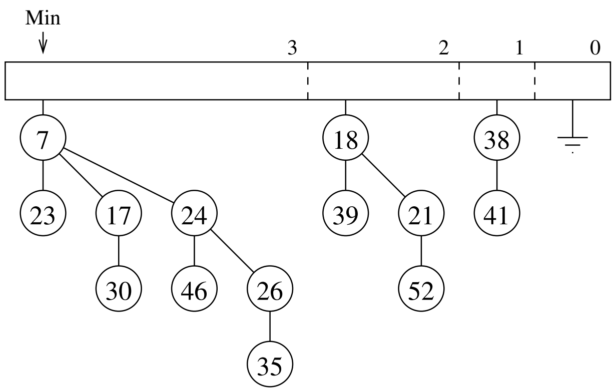


B :



(b) Führen Sie `DeleteMin(`H`)` auf folgendem binomialen Heap H aus:

H :



3. Aufgabe: Wir betrachten eine Folge von Operationen auf Zahlen in *Binärdarstellung*. Die Laufzeit wird in der Anzahl der „verarbeiteten“ Bits gezählt.

Beginnend bei der Zahl Null (0) wird n-mal hintereinander eine Eins (1) addiert.

(a) Was ist die *worst-case* Laufzeit einer einzelnen solchen Addition?

(b) Welche Laufzeit ergibt sich für die gesamte Folge von Operationen?

4. Aufgabe:
In der Vorlesung wurden die *Fibonacci-Zahlen* durch $f_0 = 1$, $f_1 = 2$ und $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ definiert. Beweisen Sie die Formel

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+2}\right)$$

5. Aufgabe:
Wir betrachten einen (am Anfang leeren) *binomialen Heap mit lazy-meld*. Führen Sie folgende Operationen aus:

- Einfügen(7)
- Einfügen(6)
- Einfügen(5)
- Einfügen(4)
- Einfügen(3)
- Einfügen(2)
- Verbessern(4→1)
- MinimumLöschen()
- Verbessern(6→1)
- MinimumLöschen()