Prof. Dr. A. Goerdt
J. Pape-Lange

TU Chemnitz
Sommersemester 2023
20. Juni 2023

Theoretische Informatik II

11. Übung

1. Aufgabe:
Geben Sie eine direkte polynomielle Reduktion (also nicht über *Clique*) von *3-SAT* auf das Problem der *unabhängigen Menge* in einem Graphen an.
Beschreiben Sie, in welcher Beziehung die Probleme *Clique*, *unabhängige Menge* und *Knotenüberdeckung* zueinander stehen.

2. Aufgabe:
Für das Problem *unabhängiger Mengen* ist folgender Algorithmus gegeben.

```
 GEGEBEN: G(V, E)
U = ∅
WHILE V ≠ ∅
    WÄHLE v ∈ V
    U = U ∪ {v}
    ENTFERNE v und alle mit v verbundenen Knoten aus V
    ENTFERNE alle Kanten aus E, die einen entfernten Knoten verwenden
END
```

- Zeigen Sie, dass U nach Durchlauf des Algorithmus eine unabhängige Menge im ursprünglichen Graphen G sein muss.
- Zeigen Sie, dass es keine größere unabhängige Menge in G gibt, die U enthält.
- Zeigen Sie, dass U trotzdem nicht notwendigerweise die größte unabhängige Menge von G ist.
- Der Algorithmus lässt sich verbessern, wenn man immer einen Knoten mit minimalem Kantengrad entfernt. Zeigen Sie, dass auch diese Verbesserung nicht immer die größte unabhängige Menge von G erzeugt.

3. Aufgabe:
Übersetzen Sie die 3-SAT-Formel $(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$ gemäß der Reduktion des Hamiltonkreisproblems in einen entsprechenden Graphen.
Geben Sie auch zu einer erfüllenden Belegung den entsprechenden Hamiltonkreis an.

4. Aufgabe: Zeigen Sie, dass das Problem der *kürzesten Wege* in gerichteten Graphen, wobei auch negative Kantengewichte zugelassen sind, $\mathcal{NP}$-vollständig ist.
Zeigen Sie außerdem, dass das Problem mit Hilfe dynamischer Programmierung in $\mathcal{O}(p(n)2^n)$ Zeit gelöst werden kann.