Prof. Dr. A. Goerdt
J. Pape-Lange

TU Chemnitz
Sommersemester 2023
1. Juli 2023

Theoretische Informatik II

12. Übung

1. Aufgabe:
Zeigen Sie, dass das folgende *Subset-Multisum-Problem* $\mathcal{NP}$-vollständig ist:

- Gegeben:
  - n positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und
  - eine positive ganze Zahl b.
- Kann b als Summe von den a_i dargestellt werden, wenn die a_i beliebig oft verwendet werden dürfen?

Hinweis: Die Reduktion für das Subset-Sum-Problem kann für das Subset-Multisum-Problem angepasst werden. Es müssen dafür sichergestellt werden, dass die Korrekturterme nicht mehrfach verwendet werden. Außerdem sind Überträge ein Problem. Eine Lösung für die Überträge ist es, Spiegelsymmetrische Zahlen zu verwenden.

2. Aufgabe:
Wir betrachten die Reduktion für des 3-SAT-Problems auf die 3-Färbbarkeit.
Welche Eigenschaft hat das Oder-Gadget? Wie wird die Symmetrie gebrochen?
Ist es möglich, einen Oder-Gadget so zu konstruieren, dass es immer 3-färbbar ist und der Zielknoten genau $x \vee y$ berechnet? Wie muss hier die Symmetrie gebrochen werden?
Zeigen Sie, dass 4-Färbbarkeit auch $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Welche Graphen kennen Sie, für die die 4-Färbbarkeit entscheidbar ist?

3. Aufgabe:
Zeigen Sie, dass das folgende Problem kürzester Wege $\mathcal{NP}$-vollständig ist:

- Gegeben:
  - Ein Graph $G(V, E)$ in dem jede Kante e_i mit einem Paar (x_i, y_i) nicht-negativer ganzer Zahlen beschriftet sind,
  - ein Startknoten s,
  - ein Zielknoten t und
  - eine positive ganze Zahl k.
- Frage: Gibt es einen Pfad $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_j})$ von s nach t, sodass sowohl $\left(\sum_{l=1}^{j} x_{i_l}\right) \leq k$ als auch $\left(\sum_{l=1}^{j} y_{i_l}\right) \leq k$ gelten? Es sollen also für einen „optimalen “ sowohl die erste als auch die zweite Komponente hinreichend klein sein.

Hinweis: Es ist sinnvoll, das Problem auf das Subset-Sum-Problem zu reduzieren. Wenn ein a_i verwendet wird, soll eine Kante $(a_i, 0)$ im Pfad verwendet werden, ansonsten soll eine Kante $(0, a_i)$ verwendet werden. Es ist außerdem hilfreich $(0, 0)$ Kanten zu verwenden.