Prof. Andreas Goerdt
M. Pippig, M. Riedel, U. Schönke

TU Chemnitz
Wintersemester 2003/2004

Algorithmen und Programmierung

5. Übung

1. Aufgabe:

   Wir betrachten die 2er-Komplementdarstellung auf n Stellen. Sei $a = (x_{n-1} \ldots x_0)_{2Kpl}$ und $b = (y_{n-1} \ldots y_0)_{2Kpl}$.
   Seien $-2^{n-1} \leq a, b \leq 2^{n-1} - 1$ so, dass auch $-2^{n-1} \leq a \cdot b \leq 2^{n-1} - 1$ gilt.
   Sei $z = (z_{2n-1} \ldots z_0)$ das Ergebnis der binären Multiplikation von $(x_{n-1} \ldots x_0)$ und $(y_{n-1} \ldots y_0)$.
   Beweisen Sie, dass

   $$(z_{n-1} \ldots z_0)_{2Kpl} = a \cdot b$$

   ist. Hinweis: Arbeiten Sie mit der „geeigneten“ Definition des 2er-Komplements.

2. Aufgabe:

   a) Programmieren Sie den Euklidischen Algorithmus zur Ermittlung von ggT(a, b) nur mit Subtraktionen (ohne Division oder Restbildung). Beweisen Sie seine Korrektheit mittels einer geeigneten Invariante.
   b) Programmieren Sie den Euklidischen Algorithmus unter Verwendung von Division und Restbildung. Beweisen Sie seine Korrektheit.
   c) Vergleichen Sie die Laufzeiten der Algorithmen bei verschiedenen Eingaben.
   d) Finden Sie eine Abschätzung nach oben für die Anzahl der Schleifendurchläufe der Algorithmen in Abhängigkeit von den Eingabewerten a und b. Hinweis: Untersuchen Sie zunächst einen einfachen Fall, etwa a beliebig und $b = 2$.
   e) Finden Sie Eingaben, für die die Algorithmen möglichst viele Schleifendurchläufe machen.

3. Aufgabe:

   a) Sei $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 1$, $b > 0$. Sei weiterhin $a > 0$. Wie ist der Logarithmus von a zur Basis b definiert? Hinweis: Ziehen Sie Ihr Mathematik-Schulbuch zu Rate.
   b) Beweisen Sie unter Verwendung Ihrer Definition aus a), dass

   $$\log_b a = (\log_b c) \cdot (\log_c a)$$

   für $b, c \neq 1$ und $a, b, c > 0$.

c) Gilt die Beziehung

$$\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c?$$

d) Finden Sie einen einfachen Zusammenhang zwischen $\log_2 10$ und $\log_{10} 2$!

e) Für $n > 0$ ist der Wert $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ die Anzahl der Bits, mit denen n im Binärsystem dargestellt wird. Finden Sie eine andere Interpretation von $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, die mit der Teilbarkeit zusammenhängt.

4. Aufgabe:

Formulieren Sie das Programm zum Auffinden der ganzzahligen Wurzel mittels binärer Suche so um, dass statt der Suchintervallbegrenzungen das Minimum des Suchintervalls und die Anzahl der Elemente verwendet werden. Formulieren Sie die zur Verifikation nötige Invariante.