3. Reelle Zahlen

$r \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$

Es gibt ein $n \geq 0$, Ziffern z_i, $0 \leq z_i < 10$

für $n-1 \geq i > -\infty$, so daß

$$r = \pm \sum_i z_i \cdot 10^i$$

$$= \pm \left(z_{n-1} z_{n-2} \ldots z_0 , z_{-1} z_{-2} \cdots \right)_{10}$$

Darstellung als Dezimalbruch.

Es ist $\displaystyle\sum_{i=-1}^{-\infty} z_i \cdot 10^i \leq 9 \cdot \sum_{i=-1}^{-\infty} 10^i$

Ab -1.

$$= 9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i$$ geom. Reihe.

$$= 9 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1 \right) = 1.$$

Also: Alles was hinter dem Komma steht ist immer ≤ 1.

Also ist diese unendliche Summe immer eine endliche Zahl. Schon hier sieht man: Nicht-Eindeutigkeit der Darstellung: $\boxed{\text{Gleichheit als abstrakte Zahl gesehen.}}$

$$0{,}999\ldots999\ldots = 1 \; !$$

Wie kommt man an diese Darstellung, insbesondere für $a \lneq 1$?

Das kann auch 0 sein.

$$a \cdot 10 = z_{-1} + a_1, \quad z_{-1} \in \mathbb{N}, \; 0 \leq a_1 \lneq 1$$

Tatsächlich $0 \leq z_{-1} \leq 9$

$$a_1 \cdot 10 = z_{-2} + a_2$$

$$a_2 \cdot 10 = z_{-3} + a_3$$

$$\vdots$$

Dann

$$a = z_{-1} \cdot \frac{1}{10} + z_{-2} \cdot \frac{1}{100} + z_{-3} \cdot \frac{1}{1000} + \ldots$$

Etwa $\frac{1}{4} \cdot 10 = 2 + \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \cdot 10 = 5 + 0. \quad \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Verbietet man unendliche Folgen von neun nach 9'en ist die angegebene Darstellung eindeutig. Das gilt genauso im Dualsystem:

$$x = \pm \sum_i z_i \cdot 2^i$$

Etwa $\frac{1}{2} = (0,1)_2$, $\frac{1}{4} = (0,01)_2$, $\frac{3}{4} = (0,11)_2$. Mit oben angegebener Methode bekommt man insbesondere heraus:

$$\frac{1}{10} \cdot 2 = 0 + \frac{2}{10} \qquad 0,0$$

$$\frac{2}{10} \cdot 2 = 0 + \frac{4}{10} \qquad 0,00$$

$\frac{4}{10}\cdot 2 = 0 + \frac{8}{10}$ 0,000

$\frac{8}{10}\cdot 2 = 1 + \frac{6}{10}$ 0,0001

$\frac{6}{10}\cdot 2 = 1 + \frac{2}{10}$ 0,00011

$\frac{2}{10}\cdot 2 = 0 + \frac{4}{10}$ 0,00011 0011

0011 ...

Ab hier wiederholt sich alles.

Es ist zur Probe

Eindeutig hier $\frac{1}{10}$.

$0,001100110011\ldots$

$= 3\cdot\left(\frac{1}{16} + \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^3 + \ldots\right)$

Und $\frac{1}{10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}$

$= 3\cdot\sum_{i=1}\left(\frac{1}{16}\right)^i$

Geometrische Reihe

$= 3\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{16}} - 1\right) = 3\cdot\left(\frac{16}{15} - 1\right) = 3\cdot\frac{1}{15} = \frac{2}{10}$

3.5

Andererseits ist $\frac{1}{2} = (0{,}1)_2 = (0{,}5)_{10}$.

Also: Endlicher Binärbruch

$\Rightarrow$ endlicher Dezimalbruch.

Endlicher Dezimalbruch, dann i.a. kein endlicher Binärbruch.

(Eindeutigkeitsprobleme bei Binärbrüchen in der Übungsaufgabe.)

Bisherige Zahlendarstellung beim Typ int: Festkommadarstellung (fixed point).

Man stellt sich die Zahlen als Vielfache von 1 (übliche Darstellung) oder Vielfache von $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{100}$, ... vor. Das Komma ist immer an der gleichen Stelle!

Jetzt: Gleitkommadarstellung (floating point). Diese Darstellung besteht aus 3 Bestandteilen wie in

$$+\,0{,}3875 \cdot 10^{10}, \quad -0{,}001 \cdot 10^{-10}, \ldots$$

Vorzeichen

Exponent

(Dezimal-) Bruch
auch: Mantisse, Signifikand.

Zur Darstellung von Zahlen in Gleitkommadarstellung hat Java die Typen float und double.

Literalkonstanten (vom Typ double) sehen folgendermaßen aus:

33.505 e7 $= 33{,}505 \cdot 10^{7}$

33.505 E10 $= 33{,}505 \cdot 10^{10}$

$.333\ E{-3} = 0{,}333 \cdot \frac{1}{1000}$,

$-.275\ E\ 3 = -0{,}275 \cdot 1000$, ...

Die interne Darstellung von Zahlen vom Typ **double** verwendet 64 Bits:

$x_{63}\, x_{62}\, x_{61}\, x_{60} \ldots\ldots \qquad x_3\, x_2\, x_1\, x_0$.

$\hat{=}$ 2 32 Bit Worte.

x_{63} Vorzeichen, $x_{63} = 1$ für $-$

$x_{63} = 0$ für $+$.

$x_{62} \ldots x_{52}$ 11 Bits (!) für den Exponenten.

Der eigentliche Exponent zur Basis 2 ergibt sich als:

Wegen Exponenten $\gtrless 0$.

$$(x_{62} \ldots x_{52}) - 1023$$

Das ist nicht (!) die 2'er Komplementdarstellung.

$$(\underbrace{11 \text{———} 1}_{11\ \text{Stellen}})_2 = 2047 = (11111111111)_2$$

Also: $-1023 \leq$ Exponent

$\leq 2046 - 1023 = 1023$

Falls Exponentbits alle 1, dann Sonderfall, d.h. entweder Unendlich, oder Not a Number (siehe unten).

Schließlich $x_{51} - x_0$ der Bruch

(Signifikand, Mantisse).

Exponent ≥ -1023 (d.h. $(x_{62} - x_{52})_2 \geq 1$)

dann normalisierte Darstellung.

Das heißt Interpretation als Binärbruch

$$(1, x_{51}\, x_{50} \dots x_0)_2$$

wird automatisch ergänzt, bei Exponentbits nicht alle 0, dadurch eins mehr.

3.9

Also etwa $(0,00011)_2$ wird

zu $.10\ldots0$ und $(x_{62}-x_{52})_2 = 1019$, denn

$1019 - 1023 = -4$.

Exponent $= -1023$ (d.h. $(x_{62}-x_{52})_2 = 0$),

dann denormalisiert, indem eine

0 vor das Komma kommt.

Normalisiert kleinste positive Zahl

bei $f = x_{51} \ldots x_0 \neq 0$

$$1,f \cdot 2^{\text{Exponent}-1023} \qquad \geq -1021$$

$$= 0,1f \cdot 2^{\overbrace{\text{Exponent}}^{\geq 1}-1022}$$

Denormalisiert bei $f = x_{51} \ldots x_0 \neq 0$

$$0,f \cdot 2^{1-1023}$$

$$= 0,f \cdot 2^{-1022}$$

float: Dasselbe auf 32 Bits

$x_{31}\, x_{30}\, x_{29} \cdots x_3 x_2 x_1 x_0$

Vorzeichen : x_{31}

Exponent : 30 – 22 (8 Bits)

Bruch : 22 – 0 (23 Bits)

$\frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{23}$

Bias –127 wird zum Exponenten addiert.

Spezielle Werte (bei float und double):

0 : Alle Stellen außer Vorzeichen.

± 0 sind darauf existent.

Unendlich (infinity)

+ infinity, – infinity. Exponent alles 1'en, Bruch alles 0'en.

Not a number (NaN)

Keine reelle Zahl, Exponent alles 1
und Bruch nicht 0.

QNaN - quiet NaN, Vorzeichenbit 1
SNaN - signalling NaN, Vorzeichenbit 0.

Bei float. Ab wann Genauigkeitsverlust? Bruch hat 23 Bits.

Normalisiert 24 Bits. Also jedes
$a \in \mathbb{N}$ mit
$$a \leq 2^{24} - 1$$

gut darstellbar

$$a + 1 = 2^{24}$$

auch, mit dem Exponenten. Aber

$$a + 2 = 2^{24} + 1 = 16.777.217$$

Die 1:
Exponent
$(0111...111)_2 = 1023$
Bruch.
Alles Nullen.
2: Exp $(10...0)_2 = 1024$
Bruch: Alles Nullen.

wird zu 16.777.216.

Größter Exponentialanteil ist:

$$2^{127} \approx 10^{38,23},$$

Da alles 1' zu nicht vorkommt.

außerdem $2 \cdot 10^{0,23} = 3,33$.

Kleinster Exponent ist

$$2^{-127} \approx 10^{-38,23}$$

Bildet vom Bruchteil.

Auf den Positionen des Bruches

kann 00....01 stehen. Das

lässt sich als $1 \cdot \frac{1}{2^{23}} = 2^{-23} = 10^{-6,9}$.

Also können kleinste positive Zahlen

bis zu

$$10^{-45}$$

dargestellt werden.