

3. Reelle Zahlen

$$r \in \mathbb{R}$$

\Leftrightarrow

Es gibt ein $n \geq 0$, Ziffern $z_i, 0 \leq z_i \leq 9$,
für $n-1 \geq i \geq -\infty$, so daß

$$r = \pm \sum_i z_i \cdot 10^i$$

$$= \pm (z_{n-1} z_{n-2} \dots z_0, z_{-1} z_{-2} \dots)_{10}$$

Darstellung als Dezimalbruch.

$$\text{Es ist } \sum_{i=-1}^{-\infty} z_i \cdot 10^i \leq 9 \cdot \sum_{i=-1}^{-\infty} 10^i$$

$$\text{Ab } -1.$$

$$= 9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i \quad \text{geom. Reihe.}$$
$$= 9 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1\right) = 1$$

Also: Alles was hinter
dieser Komma steht ist
immer ≤ 1 .

Es ist diese unendliche Summe
immer eine endliche Zahl. Schon

hier sieht man: \mathbb{N} -Eindeutigkeit

der Darstellung: $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichheit als} \\ \text{abstrakte Zahl} \\ \text{geben.} \end{array} \right.$
 $0,999\dots 999\dots = 1 !$

Wie kommt man zu dieser Darstellung,
insbesondere für $a \leq 1$?

Das kann auch 0 sein.

$$a \cdot 10 = z_{-1} + a_1 \quad z_{-1} \in \mathbb{N}, 0 \leq a_1 < 1$$

$$a_1 \cdot 10 = z_{-2} + a_2$$

$$a_2 \cdot 10 = z_{-3} + a_3$$

⋮

Tatsächlich
 $0 \leq z_{-1} \leq 9$

Dann

$$a = z_{-1} \cdot \frac{1}{10} + z_{-2} \cdot \frac{1}{100} + z_{-3} \cdot \frac{1}{1000} + \dots$$

Etwa $\frac{1}{4} \cdot 10 = 2 + \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \cdot 10 = 5 + 0 \quad \frac{1}{4} = 0,25.$$

Verbleibt man unendliche Folgen
von, nur noch 2' en ist die angegebene
Darstellung eindeutig. Das geht
genauso im Dualsystem:

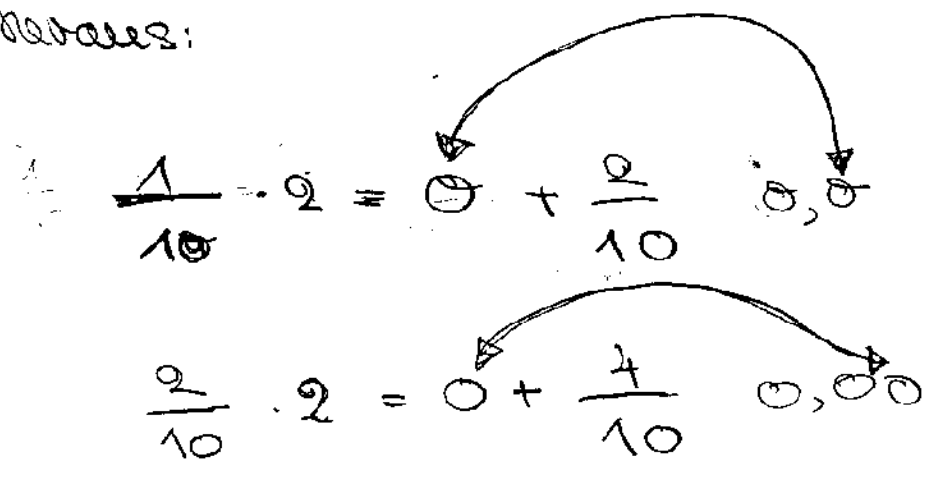
$$r = \sum_i a_i \cdot 2^i$$

Etwa $\frac{1}{2} = (0,1)_2$, $\frac{1}{4} = (0,01)_2$

$\frac{3}{4} = (0,11)_2$. Mit oben angegebenem

Methode bekommt man insbesondere

bewies:



$$\frac{4}{10} \cdot 2 = 0 + \frac{8}{10} \quad 0,000$$

$$\frac{8}{10} \cdot 2 = 1 + \frac{6}{10} \quad 0,0001$$

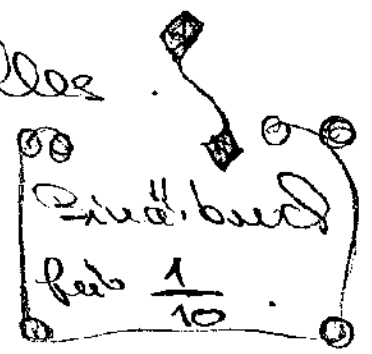
$$\frac{6}{10} \cdot 2 = 1 + \frac{2}{10} \quad 0,00011$$

$$\frac{2}{10} \cdot 2 = 0 + \frac{4}{10} \quad 0,000110011$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{0011 \dots}$$

Ab hier wiederholt sich alles.

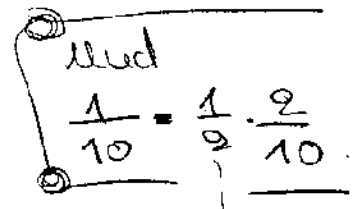
Es ist zur Folge



$$0,001100110011 \dots$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{16} + \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^3 + \dots \right)$$

$$= 3 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^i$$



Geometrische Reihe

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{16}} - 1 \right) = 3 \cdot \left(\frac{16}{15} - 1 \right) = 3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{10}$$

Wurzels ist $\frac{1}{2} = (0,1)_2 = (0,5)_{10}$

Also: Endlicher Binärbau

\Rightarrow endlicher Dezimalbau.

Endlicher Dezimalbau, dann i.a.

kein endlicher Binärbau.

(Eindeutigkeitsproblem bei Binärbau
in der Umwandlungsaufgabe.)

Bisherige Zahlendarstellung, beim

Typ ist: Festkommendarstellung (fixed point).

Man stellt sich die Zahlen als

Vielfache von 1 (übliche Darstellung)

oder Vielfache von $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{100}$, ...

vor. Das Komma ist immer an der
gleichen Stelle! \blacktriangle

$$.333 \text{ E } -3 = 0,333 \cdot \frac{1}{1000}$$

$$- .275 \text{ E } 3 = -0,275 \cdot 1000, \dots$$

Die interne Darstellung von Zahlen vom Typ double verwendet 64 Bits:

$$x_{63} x_{62} x_{61} x_{60} \dots \dots \dots x_3 x_2 x_1 x_0$$

9 32 Bit Wort.

x_{63} Vorzeichen, $x_{63} = 1$ für -
 $x_{63} = 0$ für +.

$x_{62} \dots x_{52}$ 11 Bits (1) für den Exponenten.

Der eigentliche Exponent zur Basis 2 ergibt sich als:

$$(x_{62} \dots x_{52}) - 1023$$

$$(11 - 1)_2 = 2047$$

11 Stellen

Wegen Exponenten $\neq 0$.
 Das ist mit (1)
 die 2'ige
 Komplement-
 darstellung.

Also: $-1023 \leq \text{Exponent} \leq 1023$

$\leq 2046 - 1023 = 1023$

Falls Exponentbits alle 1, dann Sonderfall, d.h. entweder Unendlich, oder abt a_krumbes (siehe unten).

Schließend $x_{51} - x_0$ des Zed

(Signifikand, Mantisse).

Exponent ≥ -1023 (d.h. $(x_{62} - x_{52})_2 \geq 1$)

dann normalisierte Darstellung.

Das heißt Interpretation als Bruch

$(1, x_{51} x_{50} \dots x_0)_2$

wird automatisch ergänzt, bei Exponentbits nicht alle 0, dadurch eine mehr.



Also etwa $(0,00011)_2$ wird

zu $.10\dots 0$ wird $(x_{62} - x_{52})_2 = 1018$, dann

$$1018 - 1023 = -4.$$

Exponent = -1023 (d.h. $(x_{62} - x_{52})_2 = 0$),

dann denormalisiert, indem eine

0 vor das Komma kommt.

Normalisiert kleinste positive Zahl

bei $f = x_{51} \dots x_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} & 1, f \cdot 2^{\text{Exponent} - 1023} \\ & = 0,1 f \cdot 2^{\frac{-1}{\text{Exponent} - 1022}} \geq -1021 \end{aligned}$$

Denormalisiert bei $f = x_{51} \dots x_0 \neq 0$

$$0, f \cdot 2^{-1-1023}$$

$$= 0, f \cdot 2^{-1022}$$

float: Dasselbe auf 32 Bits

$$x_{31} x_{30} x_{29} \dots x_3 x_2 x_1 x_0$$

Vorzeichen : x_{31}

Exponent : $30 - 22$ (8 Bits)

Bruch : $22 - 0$ (23 Bits)
 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{23}$

Bias = 127 wird zum Exponenten addiert.

Spezielle Werte (bei float und double):

0: alle Stellen außer
Vorzeichen.

± 0 sind damit existent.

Unendlich (infinity)

+ infinity, - infinity. Exponent

alles 1'en, Bruch alles 0'en.

3.11

Not a number (NaN)

Keine reelle Zahl, Exponent alles 1
und Bruch nicht 0.

Q NaN - quiet NaN, Vorzeichenbit 1

S NaN - signalling NaN, Vorzeichenbit 0.

Bei float. Ab wann Genauigkeits-
verlust? Bruch hat 23 Bits.

Normalisiert 24 Bits. Also jedes

$a \in \mathbb{N}$ mit $a \leq 2^{24} - 1$

gut darstellbar

$a + 1 = 2^{24}$

auch, mit dem Exponenten. Also

$a + 2 = 2^{24} + 1 = 16.777.217$

Bit 1:
Exponent
$(0111...111)_2 = 1023$
Bruch:
Alles Nullen.
2: Exp $(10...0)_2 = 1024$
Bruch: Alles Nullen.

wird zu 16.777.216.

Größter Exponentzialanteil ist:

$$2^{127} \approx 10^{38,23}$$

aufßerdem $2 \cdot 10^{0,23} = 3,32$.

Da alles 1' zu nicht vorbereitet.

Kleinster Exponent ist

$$2^{-127} \approx 10^{-38,23}$$

Bildet vom Bruch her.

Auf den Potenzen des Bruchs

vom (00...01) stehen. Das

heißt sich als $1 \cdot \frac{1}{2^{23}} = 2^{-23} = 10^{-6,9}$

Als können kleinste positive Zahlen

bis zu

$$10^{-45}$$

dargestellt werden.