Prof. Dr. A. Goerdt
A. Lanka

TU Chemnitz
Wintersemester 2005/2006
20.10.2005

Theoretische Informatik I

2. Übung

Geben Sie die Lösung der Aufgabe 1 bitte bis zum 28.10.2005 bei Ihrem Übungsleiter ab.

1. Aufgabe:

   Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph in Adjazenzlistendarstellung.

   Welche der folgenden Aussagen sind wahr (Begründung durch Beispiel oder Gegenbeweis)?

   a) Es ist möglich, daß es eine Kante $(u, v) \in E$ gibt, so daß gilt: Bei der Expansion von u während `BFS(`G, s`)` ist v – je nach Adjazenzlistendarstellung von G – grau oder schwarz.

   b) Es ist möglich, daß es eine Kante $(u, v) \in E$ gibt, so daß gilt: Bei der Expansion von u während `BFS(`G, s`)` ist v – je nach Adjazenzlistendarstellung von G – weiß oder grau.

   c) Es ist möglich, daß es eine Kante $(u, v) \in E$ gibt, so daß gilt: Bei der Expansion von u während `BFS(`G, s`)` ist v – je nach Adjazenzlistendarstellung von G – weiß oder schwarz.

2. Aufgabe:

   Geben Sie einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit einem Knoten $s \in V$ an, so daß folgende Bedingungen gelten.

   a) G enthält einen Baum B mit Wurzel s.

   b) Für jeden Knoten $v \in V$ ist $\texttt{Dist}_B(s, v) = \texttt{Dist}_G(s, v)$, d.h. der Weg von s nach v in B ist genauso lang wie der kürzeste Weg von s nach v in G.

   c) Trotzdem kann der Baum B niemals bei `BFS(`G, s`)` als Breitensuchbaum entstehen.

3. Aufgabe:

   Wir betrachten den Algorithmus „Verbessertes TopSort“ aus der Vorlesung. Sei $G = (V, E)$ der eingegebe gerichtete Graph in Adjazenzlistendarstellung.

a) Wir bezeichnen mit $\texttt{EGrad}_i\texttt{[}u\texttt{]}$ der Wert von $\texttt{EGrad[}u\texttt{]}$ nach dem i-ten Durchlauf der Schleife von Schritt 3. Zeigen Sie die Korrektheit der Invariante

$$\texttt{EGrad}_i\texttt{[}u\texttt{]} = \texttt{EGrad}_0\texttt{[}u\texttt{]} - \sum_{j=1}^{i} K(\texttt{v[}j\texttt{]}, u),$$

wobei $K(u, v) = 1$ ist, wenn $(u, v) \in E$ und ansonsten 0.*

b) Folgern Sie aus a): Wenn die Schleife (Schritt 3) n-mal ohne die Ausgabe „Kreis“ durchlaufen wurde, ist ($\texttt{v[1]}$, $\texttt{v[2]}$,...,$\texttt{v[}n\texttt{]}$) eine topologische Sortierung von G.

c) Folgern Sie aus a): Wenn der Algorithmus „Kreis“ ausgibt, so enthält G tatsächlich einen Kreis.

4. Aufgabe:

   Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Folge von n Knoten. Wieviele gerichtete Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ haben diese Folge als topologische Sortierung?*

5. Aufgabe:

   Der Umkehrgraph $G^T = (V, E^T)$ eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist folgendermaßen definiert: $(u, v) \in E^T \iff (v, u) \in E$.

   Beschreiben Sie ein Verfahren, wie G^T gefunden werden kann, wenn der Eingabegraph G

   a) als Adjazenzmatrix vorliegt.

   b) als Adjazenzliste vorliegt.

Hinweis: Schwierige Aufgaben sind mit * gekennzeichnet.