Prof. Dr. A. Goerdt
A. Lanka

TU Chemnitz
Wintersemester 2005/2006
27.01.2006

Theoretische Informatik I

14. Übung

Geben Sie die Lösung der Aufgabe 3 bitte bis zum 03.02.2006 bei Ihrem Übungsleiter ab oder senden Sie sie an `ti1-hausaufgaben@informatik.tu-chemnitz.de`.

1. Aufgabe:

   Wir betrachten die Multiplikation von zwei Zahlen der Länge n. Dabei sei n eine Zweierpotenz.

   a) Formulieren Sie den Divide-and-Conquer-Algorithmus gemäß Vorlesung, der vier Rekursionsaufrufe benötigt.

   b) Geben Sie die Rekursionsgleichung für seine worst-case-Laufzeit $T(n)$ an. Zeigen Sie $T(n) = O(n^2)$ durch einen Induktionsbeweis.
   Hinweis: Der einfache Ansatz $T(n) \leq d \cdot n^2$ funktioniert nicht.

   c) Für die Variante mit nur 3 rekursiven Aufrufen ergibt sich die Rekursionsgleichung $T'(n) = 3 \cdot T'(\frac{n}{2}) + c \cdot n$ mit $T'(1) = c$. Schätzen Sie $T'(n)$ bestmöglich ab.

2. Aufgabe:

   Wir betrachten das Auswahlproblem.

   a) Erläutern Sie den Linearzeitalgorithmus der Vorlesung für das Auswahlproblem. Ignorieren Sie dabei die Teilbarkeitsprobleme, die bei der Division auftreten können.

   b) Geben Sie die Rekursionsgleichung $T(n)$ an, die die worst-case Laufzeit des Algorithmus aus (a) abschätzt und zeigen Sie, daß $T(n) = O(n)$ ist.

   c) Betrachten Sie die Modifikation des Algorithmus aus (a), bei der statt der 5er Gruppen nun 3er Gruppen benutzt werden. Geben Sie die Rekursionsgleichung an, die die worst-case Laufzeit des modifizierten Algorithmus abschätzt.

   d) Zeigen Sie mit Hilfe Ihrer Rekursionsgleichung, daß der modifizierte Algorithmus aus (c) die Laufzeit $O(n \log n)$ hat.

3. Aufgabe:

   Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und A seine Adjazenzmatrix. Sei $B = A \cdot A \cdot A = A^3$. Welche Information über G steckt in den Einträgen b_{ij} von B? Was liefert die Spur (=Summe der Hauptdiagonaleinträge) von B?

   Beweisen Sie Ihre Aussagen.

   Hinweis: Die Lösung der Aufgabe 4.b) auf dem ersten Übungsblatt ist hilfreich.

4. Aufgabe:

   Betrachten Sie die 2-KNF-Formel

   $$(x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_6) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_4 \vee x_5).$$

   Benutzen Sie sie, um den MAX-2-SAT-Algorithmus mit Laufzeit $O(n^6 \cdot 2^{\frac{\log_2 7}{3} \cdot n})$ nachzuvollziehen.