

Theorie der Programmiersprachen

7. Übung

1. Aufgabe:

Geben Sie zu

$$F = (\neg \exists x (P(x, z) \vee \forall y Q(x, f(y))) \vee \forall y P(g(z, y), z))$$

die bereinigte Form, die Pränexform, die Skolemform und die Darstellung als Klauselmengenan.

2. Aufgabe:

Man zeige, dass folgendes Korrespondenzproblem eine Lösung besitzt:

$$\begin{array}{cccc} x_1 = 001 & x_2 = 01 & x_3 = 01 & x_4 = 10 \\ y_1 = 0 & y_2 = 011 & y_3 = 101 & y_4 = 001 \end{array}$$

Achtung: die kürzeste Lösung besteht aus 66 Indizes. Ohne Computereinsatz kann man dieses Problem jedoch auch „von Hand“ lösen, wenn man die Lösung rückwärts aufbaut.

Hinweis: offensichtlich ist der letzte Index $i_{66} = 3$, da nur x_3 und y_3 eine gemeinsame abschließende Bitfolge (01) haben.

3. Aufgabe:

Gegeben sei das Post'sche Korrespondenzproblem $(x_1, y_1) = (1, 11)$.

- Geben Sie dazu die Formel F analog zur Vorlesung an (vgl. Beweis der Unentscheidbarkeit des Gültigkeitsproblems in der Prädikatenlogik).
- Geben Sie eine Herbrand-Interpretation für die Formel F an.
- Geben Sie eine Herbrand-Struktur an, die kein Modell für F ist.

4. Aufgabe:

Man zeige, dass das Post'sche Korrespondenz-Problem über dem einelementigen Alphabet entscheidbar ist.

Hinweis: Ist das Post'sche Korrespondenzproblem $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ gegeben, so gibt es keine Lösung, falls

$$\left[|x_i| \not\geq |y_i| \forall i \in \{1, \dots, k\} \right]$$

dabei bezeichne $|\cdot|$ die Anzahl der Zahlen bzw. Zeichen.

5. Aufgabe:

Man zeige, dass das Gültigkeitsproblem (und damit auch das Erfüllbarkeitsproblem) der Prädikatenlogik bereits für Formeln ohne Funktionssymbole unentscheidbar ist.

6. Aufgabe:

Man zeige, dass die folgende Variante des Post'schen Korrespondenzproblem es entscheidbar ist.

gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$,
wobei $x_i, y_i \in \{0, 1\}^+$.

gefragt: Gibt es Folgen von Indizes $i_1, i_2, \dots, i_n, n \geq 1$,
und $j_1, j_2, \dots, j_m, m \geq 1$ mit $x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n} = y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_m}$?

7. Aufgabe:

In der *monadischen* Prädikatenlogik dürfen die Formeln keine Funktionssymbole enthalten und alle Prädikate müssen einstellig (monadisch) sein.

Man zeige: Falls eine *Aussage* F der monadischen Prädikatenlogik mit nur einem einstelligen Prädikatensymbol P_1 erfüllbar ist, dann gibt es bereits ein Modell für F der Mächtigkeit 2. Hieraus folgere man, dass das Erfüllbarkeits- (und Gültigkeits-) problem für Formeln der monadischen Prädikatenlogik mit nur einem einstelligen Prädikatsymbol entscheidbar ist!

Hinweis: Man zeige, dass der Grundbereich eines jeden Modells \mathcal{A} für F in 2 Äquivalenzklassen unterteilt werden kann. Die Äquivalenz zweier Elemente $u, v \in U_{\mathcal{A}}$ ergibt sich aus ihrem gleichartigen Verhalten bzgl. $P_1^{\mathcal{A}}$. Sodann kann man ein neues Modell \mathcal{B} für F definieren, wobei die Elemente von $U_{\mathcal{B}}$ gerade diese Äquivalenzklassen sind.