

Theorie der Programmiersprachen

10. Übung

1. Aufgabe:

Beweisen Sie mittels Grundresolution *und* mittels prädikatenlogischer Resolution die Unerfüllbarkeit der folgenden Formel F

$$F = \forall x \forall y ((\neg P(x) \vee \neg P(f(a)) \vee Q(y)) \wedge P(y) \wedge (\neg P(g(b, x)) \vee \neg Q(b))) .$$

Gegeben sei die Herbrandstruktur \mathcal{A} mit $P^{\mathcal{A}} = \{x \in D(F) \mid \text{Term } x \text{ enthält } g\}$ und $Q^{\mathcal{A}} = \{x \in D(F) \mid x \neq b, x \neq a \text{ (} x \text{ keine Konstante)}\}$. Zeigen Sie durch „Hochgehen“ im Beweis, dass \mathcal{A} kein Modell für F ist.

Wiederholen Sie den Zusammenhang zur Herbrandexpansion. Geben Sie $E(F)$ an und zeigen Sie, dass eine endliche Teilmenge von $E(F)$ existiert, die unerfüllbar ist.

2. Aufgabe:

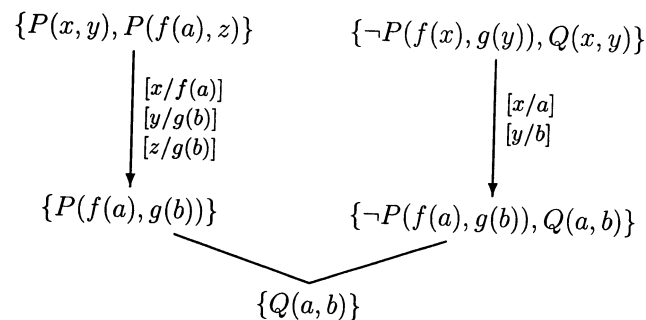
Geben Sie (bis auf Variablenumbenennungen) alle prädikatenlogischen Resolventen der beiden Klauseln K_1 und K_2 an.

$$K_1 = \{\neg P(x, y), \neg P(f(a), g(u, b)), Q(x, u)\}$$

$$K_2 = \{P(f(x), g(a, b)), \neg Q(f(a), b), \neg Q(a, b)\}$$

3. Aufgabe:

Gegeben sei folgende Grundresolution



Vollziehen Sie im Beweis des Lifting-Lemmas nach, welche prädikatenlogische Resolution hieraus entsteht.

4. Aufgabe:

Bei endlichen aussagenlogischen Klauselmengen F ist $Res^*(F)$ immer eine endliche Menge. Man gebe eine endliche prädikatenlogische Klauselmenge F an, so dass für alle n gilt:

$$Res^n(F) \neq Res^*(F).$$

5. Aufgabe:

Wir betrachten den mathematischen Begriff der Gruppe mit einer zweistelligen Operation \circ . Mit dem Prädikat $P(x, y, z)$ drücken wir aus, dass $x \circ y = z$ gilt. Dann können die Gruppenaxiome durch folgende prädikatenlogische Formel dargestellt werden:

1. $\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$
(Abgeschlossenheit)
2. $\forall u \forall v \forall w \forall x \forall y \forall z ((P(x, y, u) \wedge P(y, z, v)) \rightarrow (P(x, v, w) \leftrightarrow P(u, z, w)))$
(Assoziativität)
3. $\exists x (\forall y P(x, y, y) \wedge \forall y \exists z P(z, y, x))$
(Existenz eines links-neutralen Elementes und Existenz von Links-Inversen)

Aus den oben prädikatenlogisch formulierten Gruppenaxiomen folgere man mittels Resolutionskalkül:

- (a) Falls G eine abelsche Gruppe ist (d. h. es gilt zusätzlich das Kommutativgesetz), dann gilt für alle x, y in G , dass $x \circ y \circ x^{-1} = y$.
- (b) Betrachten Sie das Beispiel zwischen Übung 83 und Übung 84 im Buch. Vollziehen Sie den Resolutionsbeweis nach. Betrachten Sie die beiden Strukturen \mathcal{A}, \mathcal{B} mit

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{A}} &= U_{\mathcal{B}} = \{0, 1, 2\} \\ e^{\mathcal{A}} &= e^{\mathcal{B}} = 0 \\ P^{\mathcal{A}} &= P^{\mathcal{B}} = \{(x, y, z) \mid (x + y) \equiv z \pmod{3}\} \\ i^{\mathcal{A}}(0) &= i^{\mathcal{B}}(0) = k^{\mathcal{A}}(0) = k^{\mathcal{B}}(0) = 0 \\ i^{\mathcal{A}}(1) &= k^{\mathcal{A}}(1) = 2 \\ i^{\mathcal{A}}(2) &= k^{\mathcal{A}}(2) = 1 \\ i^{\mathcal{B}}(1) &= k^{\mathcal{B}}(1) = 0 \\ i^{\mathcal{B}}(2) &= k^{\mathcal{B}}(2) = 0. \end{aligned}$$

Gehen Sie im Beweis hoch, bis Sie zu einer Klausel kommen, die in der jeweiligen Interpretation falsch ist.