Prof. Dr. Andreas Goerdt

TU Chemnitz
Wintersemester 2009/10
23.10.2009

Theorie der Programmiersprachen

2. Übung

1. Aufgabe:(aus der 1. Übung):

   Ist folgende unendliche Formelmenge M erfüllbar?

   $$M = \{A_1 \vee A_2, \neg A_2 \vee \neg A_3, A_3 \vee A_4, \neg A_4 \vee \neg A_5, \ldots\}$$

   Vollziehen Sie an diesem Beispiel den Endlichkeitssatz aus der Vorlesung nach.

2. Aufgabe: (Craig'scher Interpolationssatz)

   Es gelte $\models (F \rightarrow G)$ und es gibt mindestens eine atomare Formel, die sowohl in F als auch in G vorkommt. Man beweise, daß es eine Formel H gibt, die nur aus atomaren Formeln aufgebaut ist, die sowohl in F als auch in G vorkommen, mit $\models (F \rightarrow H)$ und $\models (H \rightarrow G)$.

   Hinweis: Induktion über die Anzahl der atomaren Formeln, die in F, aber nicht in G vorkommen.

   Andere Möglichkeit: Konstruieren einer Wahrheitstafel für H anhand der Wahrheitstafeln von F und G.

3. Aufgabe:

   Übersetzen Sie folgende aussagenlogische Formel in eine erfüllbarkeitsäquivalente 3-KNF.

   $$(x \vee \neg y) \longleftrightarrow (y \wedge z)$$

4. Aufgabe:

   Sei L eine beliebige unendliche Menge von natürlichen Zahlen, dargestellt als Binärzahlen. Beweisen Sie, daß es eine unendliche Folge $w_1, w_2, w_3, \ldots$ von paarweise verschiedenen Binärzahlen gibt, so daß w_i Anfangsstück von w_{i+1} und von mindestens einem Element aus L ist $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

5. Aufgabe:

   Man gebe eine Formel an, zu der es keine äquivalente Hornformel gibt und begründe, warum dies so ist.

6. Aufgabe:

   Eine Formelmenge M_0 heißt ein *Axiomensystem* für eine Formelmenge M, falls

$$\{\mathcal{A} | \mathcal{A} \text{ ist Modell für } M_0\} = \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \text{ ist Modell für } M\}\,.$$

   M heißt *endlich axiomatisierbar*, falls es ein endliches Axiomensystem für M gibt. Es sei $\{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$ ein Axiomensystem für eine gewisse Menge M, wobei für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt: $\models (F_{n+1} \rightarrow F_n)$ und $\not\models (F_n \rightarrow F_{n+1})$. Man zeige: M ist nicht endlich axiomatisierbar. Zeigen Sie dafür zunächst: Die Menge $\{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$ enthält unendlich viele Atomformeln.