Prof. Dr. Andreas Goerdt

TU Chemnitz
Wintersemester 2009/10
06.11.2009

Theorie der Programmiersprachen

4. Übung

1. Aufgabe:

   Beweisen Sie mithilfe der Resolutionsmethode, dass man die Unerfüllbarkeit einer Formel in 2-KNF in polynomieller Zeit zeigen kann.

2. Aufgabe:

   Zeigen Sie, dass folgende Einschränkung des Resolutionskalküls vollständig ist: Es darf nur dann ein Resolvent aus den Klauseln K_1 und K_2 gebildet werden, wenn der Resolvent keine Tautologie darstellt.

3. Aufgabe:

   a) Leiten Sie den Resolutionsbeweis zum Pigeonhole-Beispiel aus der Vorlesung für $N = 3$ her. (Gehen Sie dazu spaltenweise vor.)

   b) Machen Sie sich klar, dass am Ende des Beweises alle $N + 1$ Klauseln der Art

   $$\begin{gathered} A_{N,1} \vee A_{N,2} \vee \ldots \vee A_{N,N} \\ A_{N,1} \vee A_{N,2} \vee \ldots \vee A_{N,N-1} \vee A_{N,N+1} \\ \vdots \\ A_{N,2} \vee A_{N,3} \vee \ldots \vee A_{N,N+1} \end{gathered}$$

   benötigt werden.

4. Aufgabe:

   Formulieren Sie folgendes Prinzip als widersprüchliche aussagenlogische Formel und weisen Sie mittels Resolutionsmethode nach, dass die entstehenden Formeln unerfüllbar sind: Eine Menge mit N Elementen (N ungerade) lässt sich nicht in disjunkte zweielementige Mengen einteilen.

   Hinweis: Verwenden Sie die Variablen $A_{i,j}, i < j$, mit der Bedeutung

   $$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & i \text{ und } j \text{ bilden eine zweielementige Menge} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Beispiel: $\{1, 2, 3, 4\}$ lässt sich in $\{1, 2\}$ und $\{3, 4\}$ zerlegen. Die Menge $\{1, 2, 3\}$ lässt sich nicht derart einteilen.

5. Aufgabe:

   Wiederholen Sie die Begriffe der Prädikatenlogik! Bestimmen Sie dazu von folgenden Formeln alle

   - Teilformeln
   - Terme
   - atomaren Formeln
   - Prädikatsymbole, Funktionssymbole, Konstanten, Variablen
   - alle frei vorkommenden Variablen (welche Variablen sind wo gebunden?)
   - die Matrix.

$$F_1 = (\exists x_3 P_1^3(x_1, f_1^2(x_2, x_3), f_2^1(x_1))) \vee (\forall x_2 P_2^1(f_3^2(x_2, x_1))) \vee (\exists x_2 \neg P_3^2(x_3, f_4^1(x_2)))$$

$$F_2 = ((Q(x) \vee \exists x \forall y (P(f(x), z) \wedge Q(a))) \vee \forall z R(x, z, g(x)))$$

6. Aufgabe:

   Man formuliere die Definition der stetigen Funktionen in Prädikatenlogik!