Prof. Dr. Andreas Goerdt

TU Chemnitz
Wintersemester 2009/10
13.11.2009

Theorie der Programmiersprachen

5. Übung

1. Aufgabe:

   Wiederholen Sie die Begriffe der Prädikatenlogik! Bestimmen Sie dazu von folgenden Formeln alle

   - Teilformeln
   - Terme
   - atomaren Formeln
   - alle frei vorkommenden Variablen (welche Variablen sind wo gebunden?)
   - die Matrix.

   $F_1 = (\exists x_3 P_1^3(x_1, f_1^2(x_2, x_3), f_2^1(x_1))) \vee (\forall x_2 P_2^1(f_3^2(x_2, x_1))) \vee (\exists x_2 \neg P_3^2(x_3, f_4^1(x_2)))$

2. Aufgabe:

   Gegeben sei die Formel
   $$F = \forall x \exists y P(x, y, f(z)).$$
   Man gebe eine Struktur $\mathcal{A}$ an, die Modell für F ist und eine Struktur $\mathcal{B}$, die kein Modell für F ist.

3. Aufgabe:

   Welche der folgenden Strukturen sind Modelle für die Formel
   $$F = \exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge P(x, z) \wedge \neg P(z, x))?$$

   a) $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}} = \{(m, n) \colon m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$

   b) $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}} = \{(m, m+1) \colon m \in \mathbb{N}\}$

   c) $U_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}^{\mathbb{N}}, P^{\mathcal{A}} = \{(A, B) \colon A, B \subseteq \mathbb{N}, A \subseteq B\}$

4. Aufgabe:

   In der *Prädikatenlogik mit Identität* ist auch das Symbol = zugelassen, das Gleichheit zwischen Termen bedeuten soll. Wie muss die Syntax und Semantik de Prädikatenlogik erweitert werden, um die Prädikatenlogik mit Identität zu erhalten?

5. Aufgabe:

   Man gebe eine erfüllbare prädikatenlogische Aussage F mit Identität an, so dass für jedes Modell $\mathcal{A}$ von F gilt $|U_{\mathcal{A}}| \leq 2$.

6. Aufgabe:

   Man formuliere pradikatenlogische Aussagen mit Identität, in denen das zweistellige Prädikatsymbol P bzw. das einstellige Funktionssymbol f vorkommen, die besagen:

   a) P ist eine antisymmetrische Relation,

   b) f ist eine injektive / surjektive / bijektive Funktion.

7. Aufgabe:

   Zeigen Sie, dass $(\forall x F \vee \forall x G)$ nicht äquivalent zu $\forall x(F \vee G)$ ist.

8. Aufgabe:

   Man zeige, dass $F = (\exists x P(x) \rightarrow P(y))$ äquivalent ist zu $G = \forall x\,(P(x) \rightarrow P(y))$.

9. Aufgabe:

   Man beweise, dass $\forall x \exists y P(x, y)$ eine Folgerung von $\exists y \forall x P(x, y)$ ist, aber nicht umgekehrt.