

# Theorie der Programmiersprachen

## 7. Übung

### 1. Aufgabe:

Geben Sie zu

$$F = (\neg\exists x(P(x, z) \vee \forall yQ(x, f(y))) \vee \forall yP(g(z, y), z))$$

die bereinigte Form, die Pränexform, die Skolemform und die Darstellung als Klauselmengen an.

### 2. Aufgabe:

Man zeige, dass folgendes Korrespondenzproblem eine Lösung besitzt:

$$\begin{array}{cccc} x_1 = 001 & x_2 = 01 & x_3 = 01 & x_4 = 10 \\ y_1 = 0 & y_2 = 011 & y_3 = 101 & y_4 = 001 \end{array}$$

Achtung: die kürzeste Lösung besteht aus 66 Indizes. Ohne Computereinsatz kann man dieses Problem jedoch auch „von Hand“ lösen, wenn man die Lösung rückwärts aufbaut.

Hinweis: offensichtlich ist der letzte Index  $i_{66} = 3$ , da nur  $x_3$  und  $y_3$  eine gemeinsame abschließende Bitfolge (01) haben.

### 3. Aufgabe:

Gegeben sei das Post'sche Korrespondenzproblem  $(x_1, y_1) = (1, 11)$ .

- Geben Sie dazu die Formel  $F$  analog zur Vorlesung an (vgl. Beweis der Unentscheidbarkeit des Gültigkeitsproblems in der Prädikatenlogik).
- Geben Sie eine Herbrand-Interpretation für die Formel  $F$  an.
- Geben Sie eine Herbrand-Struktur an, die kein Modell für  $F$  ist.

### 4. Aufgabe:

Man zeige, dass das Post'sche Korrespondenz-Problem über dem einelementigen Alphabet entscheidbar ist.

Hinweis: Ist das Post'sche Korrespondenzproblem  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$  gegeben, so gibt es keine Lösung, falls

$$\left[ |x_i| \not\geq |y_i| \forall i \in \{1, \dots, k\} \right]$$

dabei bezeichne  $|\cdot|$  die Anzahl der Zahlen bzw. Zeichen.

5. Aufgabe:

Man zeige, dass das Gültigkeitsproblem (und damit auch das Erfüllbarkeitsproblem) der Prädikatenlogik bereits für Formeln ohne Funktionssymbole unentscheidbar ist.

6. Aufgabe:

Man zeige, dass die folgende Variante des Post'schen Korrespondenzproblem es entscheidbar ist.

*gegeben:* Eine endliche Folge von Wortpaaren  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ ,  
wobei  $x_i, y_i \in \{0, 1\}^+$ .

*gefragt:* Gibt es Folgen von Indizes  $i_1, i_2, \dots, i_n, n \geq 1$ ,  
und  $j_1, j_2, \dots, j_m, m \geq 1$  mit  $x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n} = y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_m}$ ?

7. Aufgabe:

In der *monadischen* Prädikatenlogik dürfen die Formeln keine Funktionssymbole enthalten und alle Prädikate müssen einstellig (monadisch) sein.

Man zeige: Falls eine *Aussage*  $F$  der monadischen Prädikatenlogik mit nur einem einstelligen Prädikatsymbol  $P_1$  erfüllbar ist, dann gibt es bereits ein Modell für  $F$  der Mächtigkeit 2. Hieraus folgere man, dass das Erfüllbarkeits- (und Gültigkeits-) problem für Formeln der monadischen Prädikatenlogik mit nur einem einstelligen Prädikatsymbol entscheidbar ist!

Hinweis: Man zeige, dass der Grundbereich eines jeden Modells  $\mathcal{A}$  für  $F$  in 2 Äquivalenzklassen unterteilt werden kann. Die Äquivalenz zweier Elemente  $u, v \in U_{\mathcal{A}}$  ergibt sich aus ihrem gleichartigen Verhalten bzgl.  $P_1^{\mathcal{A}}$ . Sodann kann man ein neues Modell  $\mathcal{B}$  für  $F$  definieren, wobei die Elemente von  $U_{\mathcal{B}}$  gerade diese Äquivalenzklassen sind.