Prof. Dr. Andreas Goerdt

TU Chemnitz
Wintersemester 2009/10
08.01.2010

Theorie der Programmiersprachen

11. Übung

1. Aufgabe:

   Wir betrachten den mathematischen Begriff der Gruppe mit einer zweistelligen Operation $\circ$. Mit dem Prädikat $P(x, y, z)$ drücken wir aus, dass $x \circ y = z$ gilt. Dann können die Gruppenaxiome durch folgende prädikatenlogische Formel dargestellt werden:

   1. $\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$
      (Abgeschlossenheit)
   2. $\forall u \forall v \forall w \forall x \forall y \forall z \left((P(x, y, u) \wedge P(y, z, v)) \rightarrow (P(x, v, w) \leftrightarrow P(u, z, w)) \right)$
      (Assoziativität)
   3. $\exists x \left(\forall y P(x, y, y) \wedge \forall y \exists z P(z, y, x) \right)$
      (Existenz eines links-neutralen Elementes und Existenz von Links-Inversen)

   Betrachten Sie das Beispiel zwischen Übung 83 und Übung 84 im Buch. Vollziehen Sie den Resolutionsbeweis nach. Betrachten Sie die beiden Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit

   $$\begin{aligned}
   &U_{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{B}} = \{0, 1, 2\} \\
   &e^{\mathcal{A}} = e^{\mathcal{B}} = 0 \\
   &P^{\mathcal{A}} = P^{\mathcal{B}} = \{(x, y, z) | (x + y) \equiv z \mod 3\} \\
   &i^{\mathcal{A}}(0) = i^{\mathcal{B}}(0) = k^{\mathcal{A}}(0) = k^{\mathcal{B}}(0) = 0 \\
   &i^{\mathcal{A}}(1) = k^{\mathcal{A}}(1) = 2 \\
   &i^{\mathcal{A}}(2) = k^{\mathcal{A}}(2) = 1 \\
   &i^{\mathcal{B}}(1) = k^{\mathcal{B}}(1) = 0 \\
   &i^{\mathcal{B}}(2) = k^{\mathcal{B}}(2) = 0.
   \end{aligned}$$

   Gehen Sie im Beweis hoch, bis Sie zu einer Klausel kommen, die in der jeweiligen Interpretation falsch ist.

2. Aufgabe:

   Beweisen Sie mittels Grundresolution *und* mittels prädikatenlogischer Resolution die Unerfüllbarkeit der folgenden Formel F

   $$F = \{\{\neg P(x, y), \neg P(f(a), g(u, b)), \neg Q(x, u)\}, \{P(f(x), g(a, b)), \neg Q(f(y), b), \}, \{Q(f(x), y)\}\}.$$

Zeigen Sie durch „Hochgehen“ im Beweis, dass jede beliebige Struktur $\mathcal{A}$ kein Modell für F ist.

Wiederholen Sie den Zusammenhang zur Herbrandexpansion. Geben Sie $E(F)$ an und zeigen Sie, dass eine endliche Teilmenge von $E(F)$ existiert, die unerfüllbar ist.

3. Aufgabe:

   In der *monadischen* Prädikatenlogik dürfen die Formeln keine Funktionssymbole enthalten und alle Prädikate müssen einstellig (monadisch) sein.

   Man zeige: Falls eine *Aussage* F der monadischen Prädikatenlogik mit den einstelligen Prädikatensymbolen $P_1, \ldots, P_n$ erfüllbar ist, dann gibt es bereits ein Modell für F der Mächtigkeit 2^n. Hieraus folgere man, dass das Erfüllbarkeits- (und Gültigkeits-) problem für Formeln der monadischen Prädikatenlogik entscheidbar ist!

   Hinweis: Man zeige, dass der Grundbereich eines jeden Modells $\mathcal{A}$ für F in 2^n Äquivalenzklassen unterteilt werden kann. Die Äquivalenz zweier Elemente $u, v \in U_{\mathcal{A}}$ ergibt sich aus ihrem gleichartigen Verhalten bzgl. $P_1^{\mathcal{A}}, \ldots, P_n^{\mathcal{A}}$. Sodann kann man ein neues Modell $\mathcal{B}$ für F definieren, wobei die Elemente von $U_{\mathcal{B}}$ gerade diese Äquivalenzklassen sind.

4. Aufgabe:

   Falls bei einem Resolutionsschritt in den Elternklauseln jeweils nur *ein* Literal zur Unifikation herangezogen wird, so spricht man von *binärer Resolution*. (Mit anderen Worten, in der Definition der prädikatenlogischen Resolution ist $m = n = 1$ gesetzt). Man zeige durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die Beschränkung auf binäre Resolutionen nicht vollständig ist.