

Theoretische Informatik I

3. Übung

Geben Sie die Lösung der Aufgabe 4 bitte bis zum 02.11.2015 9:15 Uhr ab. (Briefkasten vorm Raum 1/266 oder per eMail an fal@informatik.tu-chemnitz.de, *Betreff: TI1 Hausaufgaben*)

1. Aufgabe:

- (a) Sei $c > 1$ eine beliebige Konstante. Zeigen Sie ohne Verwendung der Differentialrechnung, daß es ein $x_0 = x_0(c)$ gibt, so daß für alle $x > x_0$ gilt:

$$2^x > x^c$$

- (b) Folgern Sie aus a), dass für jede noch so große Konstante k und jede noch so kleine Konstante $d > 1$

$$(i) \quad d^x > x^k \qquad (ii) \quad x > (\ln x)^k \qquad (iii) \quad d^{\sqrt[k]{x}} > x^k$$

gilt, wenn $x > x_0 = x_0(d, k)$ erfüllt ist.

2. Aufgabe: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit mindestens zwei Knoten. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- (a) Die Summe der Grade aller Knoten ist durch 2 teilbar.
(b) Es gibt stets zwei Knoten, die denselben Grad haben.

3. Aufgabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ wird *bipartit* oder *2-färbbar* genannt, wenn es zwei Mengen V_1 und V_2 gibt, so dass folgendes gilt:

- $V = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
- Für alle Kanten $\{u, v\} \in E$ gilt entweder $u \in V_1$ und $v \in V_2$ oder $u \in V_2$ und $v \in V_1$. Das heißt, es gibt keine Kante, bei der beide Endpunkte zu V_1 oder beide Endpunkte zu V_2 gehören.

Der Begriff *2-färbbar* wird benutzt, weil man die Knoten des Graphen so mit zwei Farben färben kann, dass keine Kante zwei gleich gefärbte Knoten verbindet.

- (a) Geben Sie einen Algorithmus an, der mit einer Laufzeit $O(|V| + |E|)$ erkennt, ob ein gegebener ungerichteter Graph G *2-färbbar* ist. Verwenden Sie die Breitensuche und die von der Breitensuche gelieferten Distanzwerte.

- (b) Analog zu 2-färbbaren Graphen sind *3-färbbare* Graphen definiert. Versuchen Sie, Ihre Idee aus a) für einen Test auf 3-Färbbarkeit zu übertragen.
- (c) Geben Sie einen Algorithmus an, der erkennt, ob ein gegebener Graph 3-färbbar ist oder nicht. Bestimmen Sie die Laufzeit Ihres Verfahrens.

4. Aufgabe: Betrachten Sie folgenden Algorithmus, der als Eingabe einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ erhält.

1. $G' = G$
2. Solange es in G' einen Knoten u mit $\text{Grad} \leq 2$ gibt
Entferne u (mit all seinen Kanten) aus G'
3. Falls G' leer ist: Ausgabe 'G ist 3-färbbar'
4. Sonst: Ausgabe 'weiß nicht'

- (a) Wir betrachten den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{4, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 5\}, \{6, 5\}, \{7, 5\}, \{5, 4\}\}.$$

Geben Sie G' nach jedem Durchlauf von Schritt 2 an.

- (b) Geben Sie einen dreifärbbaren Graphen G an, bei dem obiger Algorithmus die Antwort „weiß nicht“ liefert. Geben Sie auch G' am Ende von Schritt 2 an.
- (c) Zeigen Sie die Korrektheit des Algorithmus. D.h. wenn der Graph *nicht* 3-färbbar ist, darf auf keinen Fall „G ist 3-färbbar“ ausgegeben werden!

Hinweis: Verfolgen Sie den Algorithmus vom Ende her zum Anfang hin. (\rightarrow Induktionsbeweis)