Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

TU Chemnitz
Wintersemester 2015/2016
11.12.2015

Theoretische Informatik I

10. Übung

Geben Sie die Lösung der Aufgabe *1* bitte bis zum *04.01.2016 9:15 Uhr* ab. (Briefkasten vorm Raum 1/266 oder per eMail an `falu@informatik.tu-chemnitz.de`, *Betreff:* `TI1 Hausaufgaben`) **Die Aufgaben werden diesmal als Zusatzpunkte gewertet.**

1. Aufgabe: Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ, d.h. die Rechnung $(A \cdot B) \cdot C$ liefert das gleiche Ergebnis wie die Rechnung $A \cdot (B \cdot C)$. Allerdings sind je nach Klammerung unterschiedlich viele skalare Multiplikationen notwendig.

Ein Beispiel. Die 3×5-Matrix A, die 5×3-Matrix B und die 3×3-Matrix C.

$$A = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Die Rechnung $(A \cdot B) \cdot C$ benötigt $3^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 3 = 72$ Multiplikationen, während $A \cdot (B \cdot C)$ $(5 \cdot 3) \cdot 3 + 3^2 \cdot 5 = 90$ Multiplikationen benötigt.

Sind nun n Matrizen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ gegeben, interessiert man sich für die Klammerung des Produktes $M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_n$, bei der die wenigsten Multiplikationen ausgeführt werden müssen.

(a) Geben Sie zunächst einen rekursiven Lösungsansatz für das Problem an.

Wichtig: Wie berechnet sich die Anzahl der notwendigen Multiplikationen für die betrachteten Teilstücke?

(b) Entwerfen Sie daraus einen Algorithmus, der dieses Problem in einer Laufzeit von $O(n^3)$ löst. Verwenden Sie dazu den Ansatz der *dynamischen Programmierung.*

(c) Welche bedeutung haben Ihre Tabellenenträge und in welcher Reihenfolge müssen diese ausgefüllt werden?

Geben Sie am Ende auch eine optimale Klammerung aus.

Die Eingabe ist ein Feld $D[0..n]$ mit den Dimensionen der Matrizen. Dabei steht $D[i-1]$ für die Anzahl der Zeilen vom M_i und $D[i]$ für die Anzahl der Spalten von M_i. Im Beispiel wäre D also $[3, 5, 3, 3]$.

Hinweis: Die *Matrixkettenmultiplikation* ist dem Problem des *optimalen statischen binären Suchbaumes* aus der Vorlesung sehr ähnlich.

2. Aufgabe: Gegeben sind die beiden Zeichenfolgen A und B.

$$A = \text{cdbaeg} \quad B = \text{abdgae}$$

Berechnen Sie die *längste gemeinsame Teilfolge* von A und B. Verwenden Sie dazu das Verfahren zur dynamischen Programmierung aus der Vorlesung.

3. Aufgabe: Seien zwei Zeichenfolgen z_1 und z_2 gegeben. Analog zur längsten gemeinsamen Teilfolge kann man die *kürzeste gemeinsame Oberfolge* definieren. Für $z_1 = abec$ und $z_2 = dbc$ wäre das *adbec* oder auch *dabec*.
Formulieren Sie einen Algorithmus, der mit Hilfe dynamischer Programmierung die kürzeste gemeinsame Oberfolge in Zeit $O(|z_1| \cdot |z_2|)$ findet.

4. Aufgabe: Wir betrachten das Problem des *optimalen statischen (Binär-)Suchbaums*. Gegeben seien die Worte

$$w_1 = \text{gib} \qquad w_2 = \text{hallo} \qquad w_3 = \text{ich} \qquad w_4 = \text{zu}$$

Diese werden mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_1 = 0.3 \qquad p_2 = 0.4 \qquad p_3 = 0.1 \qquad p_4 = 0.2$$

gesucht.

Lösen Sie das Problem mit dynamischer Programmierung:

(a) Welche Bedeutung hat der Tabelleneintrag $T[i, j]$?

(b) Geben Sie die Tabelle T am Ende des Algorithmus an.

(c) Geben Sie den optimalen statischen Suchbaum an.