Prof. Dr. A. Goerdt
Dr. L. Falke

TU Chemnitz
Wintersemester 2017/2018
22.12.2017

Theorie der Programmiersprachen

4. Übung

1. Aufgabe: Wiederholen Sie die Begriffe der Prädikatenlogik! Bestimmen Sie dazu von folgenden Formel alle

- Teilformeln,
- Terme,
- atomaren Formeln,
- alle frei vorkommenden Variablen, (Welche Variablen sind wo gebunden?)
- sowie die Matrix.

$$F_1 \;=\; \Big(\exists x_3 P_1^3\big(x_1, f_1^2(x_2,x_3), f_2^1(x_1)\big)\Big) \vee \Big(\forall x_2 P_2^1\big(f_3^2(x_2,x_1)\big)\Big) \vee \Big(\exists x_2 \neg P_3^2\big(x_3, f_4^1(x_2)\big)\Big)$$

2. Aufgabe: Gegeben sei die Formel

$$F \;=\; \forall x \exists y P(x,y,f(z)).$$

Man gebe eine Struktur $\mathcal{A}$ an, die Modell für F ist und eine Struktur $\mathcal{B}$, die kein Modell für F ist.

3. Aufgabe: Welche der folgenden Strukturen sind Modelle für die folgende Formel?

$$F \;=\; \exists x \exists y \exists z \Big(P(x,y) \wedge P(z,y) \wedge P(x,z) \wedge \neg P(z,x)\Big)$$

(a) $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N},\; P^{\mathcal{A}} = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{N}, m < n\}$

(b) $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N},\; P^{\mathcal{A}} = \{(m,m+1) \mid m \in \mathbb{N}\}$

(c) $U_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}^{\mathbb{N}},\; P^{\mathcal{A}} = \{(A,B) \mid A,B \subseteq \mathbb{N}, A \subseteq B\}$

4. Aufgabe: In der *Prädikatenlogik mit Identität* ist auch das Symbol „=“ zugelassen, das Gleichheit zwischen Termen bedeuten soll. Wie muss die *Syntax* und *Semantik* der Prädikatenlogik erweitert werden, um die Prädikatenlogik mit Identität zu erhalten?

5. Aufgabe: Man gebe eine erfüllbare prädikatenlogische Aussage F mit Identität an, so dass für jedes Modell $\mathcal{A}$ von F gilt $|U_{\mathcal{A}}| \leq 2$.

6. Aufgabe: Man formuliere pradikatenlogische Aussagen mit Identität, in denen das zweistellige Prädikatsymbol P bzw. das einstellige Funktionssymbol f vorkommen, die besagen:

(a) P ist eine antisymmetrische Relation,

(b) f ist eine injektive / surjektive / bijektive Funktion.

7. Aufgabe: Zeigen Sie, dass $\big(\forall x F \vee \forall x G\big)$ nicht äquivalent zu $\forall x\big(F \vee G\big)$ ist.

8. Aufgabe: Man zeige, dass

$$F \;=\; \big(\exists x P(x) \to P(y)\big) \quad \text{äquivalent zu} \quad G \;=\; \forall x\big(P(x) \to P(y)\big) \quad \text{ist.}$$

9. Aufgabe: Man beweise, dass $\forall x \exists y P(x,y)$ eine Folgerung von $\exists y \forall x P(x,y)$ ist, aber nicht umgekehrt.