Prof. Dr. A. Goerdt
Julian Pape-Lange

TU Chemnitz
Wintersemester 2019/2020
22.11.2019

Theorie der Programmiersprachen

6. Übung

1. Aufgabe: Wiederholen Sie die Begriffe der Prädikatenlogik! Bestimmen Sie dazu von Formel F alle

- Teilformeln,
- Terme,
- atomaren Formeln,
- alle frei vorkommenden Variablen, (Welche Variablen sind wo gebunden?)
- sowie die Matrix.

$$F = \Big(\Big(\exists x_3 P_1^3\big(x_1, f_1^2(x_2, x_3), f_2^1(x_1)\big)\Big) \vee \Big(\forall x_2 P_2^1\big(f_3^2(x_2, x_1)\big)\Big)\Big) \vee \Big(\exists x_2 \neg P_3^2\big(x_3, f_4^1(x_2)\big)\Big)$$

2. Aufgabe: Gegeben sei die Formel

$$F = \forall x \exists y P(x, y, f(z)).$$

Geben Sie eine Struktur $\mathcal{A}$ an, die Modell für F ist und eine Struktur $\mathcal{B}$, die kein Modell für F ist.

3. Aufgabe: Welche der folgenden Strukturen sind Modelle für die folgende Formel?

$$F = \exists x \exists y \exists z \Big(P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge P(x, z) \wedge \neg P(z, x)\Big)$$

(a) Grundmenge $U = \mathbb{N}$
P wird interpretiert als $\{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$
(Also ist $P(m, n)$ wahr, genau dann wenn $m < n$)

(b) $U = \mathbb{N},\ P = \{(m, m+1) \mid m \in \mathbb{N}\}$

(c) $U = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (die Potenzmenge von $\mathbb{N}$), $P = \{(A, B) \mid A, B \subseteq \mathbb{N}, A \subseteq B\}$

4. Aufgabe: Zeigen Sie, dass $\big(\forall x F \vee \forall x G\big)$ nicht äquivalent zu $\forall x\big(F \vee G\big)$ ist.

5. Aufgabe: Beweisen Sie, dass $\forall x \exists y P(x,y)$ eine Folgerung von $\exists y \forall x P(x,y)$ ist, aber nicht umgekehrt.

6. Aufgabe:
Sei F eine erfüllbare Formel und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für F mit $|U_{\mathcal{A}}| = n$.
Zeigen Sie, dass es ein Modell $\mathcal{B}$ für F gibt, sodass $|U_{\mathcal{B}}| = n + 1$.

7. Aufgabe: In der *Prädikatenlogik mit Identität* ist auch das Symbol „=“ zugelassen, das Gleichheit zwischen Termen bedeuten soll. Wie muss die *Syntax* und *Semantik* der Prädikatenlogik erweitert werden, um die Prädikatenlogik mit Identität zu erhalten?

8. Aufgabe: Formulieren Sie prädikatenlogische Aussagen mit Identität, in denen das zweistellige Prädikatsymbol P bzw. das einstellige Funktionssymbol f vorkommen, die besagen:

(a) P ist eine antisymmetrische Relation,

(b) f ist eine injektive / surjektive / bijektive Funktion.