Prof. Dr. A. Goerdt
Julian Pape-Lange

TU Chemnitz
Wintersemester 2019/2020
28.11.2019

Theorie der Programmiersprachen

7. Übung

1. Aufgabe: Geben Sie zu

$$F \;=\; \forall x \exists y P(x, f(y)) \wedge \forall y \big(Q(x,y) \vee R(x)\big)$$

die äquivalente, bereinigte Form an.

2. Aufgabe: Formulieren Sie einen Algorithmus zur Erstellung von äquivalenten Formeln in bereinigter Pränexform.

3. Aufgabe: Geben Sie zu

$$F \;=\; \Big(\forall x \exists y P\big(x, g(y, f(x))\big) \vee \neg Q(z)\Big) \vee \neg \forall x R(x,y)$$

die äquivalente, bereinigte Pränexform an.

4. Aufgabe: Die *Skolemform* einer Formel ist eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in bereinigter Pränexform. In der Vorlesung wurde die Skolemform gebildet, indem von links nach rechts in der bereinigten Pränexform die Existenzquantoren entfernt wurden und stattdessen sogenannte *Skolemfunktionen* in die Formel eingesetzt wurden. Wiederholen Sie den Ablauf dieses Algorithmus'. Geben Sie zu

$$F \;=\; \forall x \exists y \forall z \exists w \big(\neg P(a,w) \vee Q(f(x), y)\big)$$

die Skolemform an.

5. Aufgabe: Geben Sie zu

$$F \;=\; \forall z \exists y \big(P(x, g(y), z) \vee \neg \forall x Q(x)\big) \wedge \neg \forall z \exists x \neg R(f(x,z), z)$$

die bereinigte Form, die Pränexform und die Skolemform an.

6. Aufgabe: Wir betrachten die folgende Formel.

$$F \;=\; \forall x \exists y \forall z \exists u \big(Q(x,y) \wedge Q(u, f(y,z))\big)$$

(a) Geben Sie dazu die Skolemform unter Nutzung des Algorithmus' aus der Vorlesung an.

(b) Betrachten wir nun die folgende Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ mit

$$\begin{array}{rcl} U_\mathcal{A} & = & \mathbb{Q} \\ I_\mathcal{A}(Q) & = & Q^\mathcal{A} \;=\; \{(x,y) \mid x, y \in U_\mathcal{A}, x < y\} \\ I_\mathcal{A}(f) & = & f^\mathcal{A} \;=\; \text{Additionsfunktion auf } U_\mathcal{A} \quad (f^\mathcal{A}(x,y) \;=\; x+y) \end{array}$$

Überzeugen Sie sich davon, dass $\mathcal{A}$ ein Modell von F ist. Geben Sie für diesen Fall geeignete Skolemfunktionen an. Beachten Sie die Abhängigkeiten der Skolemfunktionen voneinander!

(c) Geben Sie für die Skolemform von F ein Modell $\mathcal{B}$ mit $U_\mathcal{B} = \mathbb{N}$ an und zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ auch ein Modell von F ist.