Prof. Dr. A. Goerdt
Julian Pape-Lange

TU Chemnitz
Wintersemester 2019/2020
16.01.2020

Theorie der Programmiersprachen

12. Übung

1. Aufgabe: Sechs Münzen, die auf der Vorderseite eine Zahl und auf der Rückseite einen Kopf zeigen, liegen in folgender Anordnung:

Kopf Kopf Kopf Zahl Zahl Zahl

In einem Zug dürfen Sie jeweils zwei nebeneinanderliegende Münzen umdrehen.

(a) Finden Sie eine Anordnung der sechs Münzen, die nicht erreichbar ist.

(b) Stellen Sie alle erreichbaren Anordnungen mit Hilfe von Hornformeln dar.

(c) Zeigen Sie durch SLD-Resolution, dass die Anordnung

Zahl Kopf Zahl Kopf Kopf Zahl

erreicht werden kann.

(d) Finden Sie durch Hochgehen im Beweis eine Folge von Zügen, die zu dieser Anordnung führt.

2. Aufgabe: Formulieren Sie das folgende Rätsel in der Prädikatenlogik und verwenden Sie die Antwortprädikatmethode, um es zu lösen.

> *Tom*, *Mike* und *John* gehören dem Alpenverein an. Jedes *Mitglied* des Alpenvereins ist entweder *Skifahrer* oder *Bergsteiger* oder beides. Kein Bergsteiger liebt den *Regen* und alle Skifahrer lieben den *Schnee*. Mike liebt alles, was Tom nicht liebt und umgekehrt. Mike und John lieben den Schnee.
>
> Gibt es ein Mitglied des Alpenvereins, das Bergsteiger ist und kein Skifahrer? Wer ist dies?

3. Aufgabe:
In der Vorlesung wurde die Addition rekursiv definiert durch:

$$A(x, 0, x)$$
$$A(x, y, z) \to A(x, s(y), s(z))$$

wobei $s(x)$ den Nachfolger von x bezeichnet (also $s(x) = x + 1$). Das Prädikat $A(x, y, z)$ ist daher wahr, falls $z = x + y$.

(a) Zeigen Sie, dass für

$$\begin{aligned}&M(x,0,0)\\&M(x,y,z_1)\wedge A(x,z_1,z_2)\to M(x,s(y),z_2)\end{aligned}$$

das Prädikat $M(x,y,z)$ wahr ist, falls $z=x\cdot y$

(b) Eine Zahl ist *zusammengesetzt*, wenn sie das Produkt zweier Zahlen ist, die größer als eins sind. Stellen Sie eine Hornformel auf, sodass $Z(x)$ wahr wird, wenn x zusammengesetzt ist.

(c) Zeigen Sie, dass 15 zusammengesetzt ist.

4. Aufgabe:
Für den größten gemeinsamen Teiler gilt:

$$\begin{aligned}&\mathrm{ggT}(x,0)=x,\\&\mathrm{ggT}(x,y)=\mathrm{ggT}(y,x)\text{ und}\\&\mathrm{ggT}(x,y)=\mathrm{ggT}(x-y,y).\end{aligned}$$

(a) Stellen Sie eine Hornformel auf, sodass $D(x,y,z)$ wahr ist, falls $z=\mathrm{ggT}(x,y)$.

(b) In den meisten Implementationen die auf diese Weise den größten gemeinsamen Teiler bestimmen, muss getestet werden, welche Zahl die größere ist. Warum ist dies hier nicht notwendig?

5. Aufgabe:
Durch die Übersetzung des Postschen Korrespondenzproblem in die Prädikatenlogik wurde gezeigt, dass es im Allgemeinen keinen Algorithmus gibt, der entscheidet, ob eine gegebene prädikatenlogische Formel widersprüchlich ist.

(a) Zeigen Sie, dass es prädikatenlogische Formeln gibt, die nicht als Hornformeln darstellbar sind.

(b) Zeigen Sie, dass die aus der Vorlesung bekannte Übersetzung des Postschen Korrespondenzproblem in die Prädikatenlogik sogar eine Hornformel ergibt und dass die Widersprüchlichkeit dieser Hornformel eine Lösung des Postschen Korrespondenzproblem liefern kann.

(c) Finden Sie mit Hilfe der Antwortprädikatmethode eine Lösung für das Postsche Korrespondenzproblem

$$\begin{array}{ll}x_1=0 & x_2=11\\ y_1=10 & y_2=1\end{array}.$$

6. Aufgabe: Betrachten Sie das Additionsprogramm aus der Vorlesung

$$\big\{\{A(x,0,x)\},\ \{A(x,s(y),s(z)),\neg A(x,y,z)\}\big\}.$$

Berechnen Sie $A\big(x,y,s(s(0))\big)$ und $A\big(x,x,s(x)\big)$ und geben Sie alle möglichen Lösungen an. Welches Problem tritt bei $A\big(x,s(x),x\big)$ bzw. $A\big(x,s(s(0)),s(0)\big)$ auf?