Prof. Dr. A. Goerdt
Julian Pape-Lange

TU Chemnitz
Wintersemester 2019/2020
16.01.2020

Theoretische Informatik I

12. Übung

Abgabe: Lösen Sie die Aufgabe **2**. Ihre Lösungen geben Sie bitte entweder

- vor oder nach der Vorlesung am 21.01.2020 oder
- bis zum 21.01.2020 um 13:00 Uhr per Mail
  an `julian.pape-lange@informatik.tu-chemnitz.de`
  mit *Betreff:* `TI1 Hausaufgaben`

ab.

1. Aufgabe: Wir betrachten das Problem des *optimalen statischen (Binär-)Suchbaums.* Gegeben seien die Zahlen

$$a_1 = 7 \qquad a_2 = 13 \qquad a_3 = 29 \qquad a_4 = 42$$

Diese werden mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_1 = 0.3 \qquad p_2 = 0.4 \qquad p_3 = 0.1 \qquad p_4 = 0.2$$

gesucht.
Lösen Sie das Problem mit dynamischer Programmierung:

(a) Welche Bedeutung hat der Tabelleneintrag $T[i, j]$?

(b) Geben Sie die Tabelle T am Ende des Algorithmus an.

(c) Geben Sie den optimalen statischen Suchbaum an.

2. Aufgabe: ((5+5)P)

(a) Finden Sie alle möglichen Suchbäume für die Zahlen 1, 2 und 3.

(b) Geben Sie für jeden Suchbaum eine Häufigkeitsverteilung an, sodass der Suchbaum optimal ist.

3. Aufgabe: Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ, d.h. die Rechnung $(A \cdot B) \cdot C$ liefert das gleiche Ergebnis wie die Rechnung $A \cdot (B \cdot C)$. Allerdings sind je nach Klammerung unterschiedlich viele skalare Multiplikationen notwendig.

Ein Beispiel. Die 3×5-Matrix A, die 5×3-Matrix B und die 3×3-Matrix C.

$$A = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Die Rechnung $(A \cdot B) \cdot C$ benötigt $3^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 3 = 72$ Multiplikationen, während $A \cdot (B \cdot C)$ $(5 \cdot 3) \cdot 3 + 3^2 \cdot 5 = 90$ Multiplikationen benötigt.

Sind nun n Matrizen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ gegeben, interessiert man sich für die Klammerung des Produktes $M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_n$, bei der die wenigsten Multiplikationen ausgeführt werden müssen.

(a) Geben Sie zunächst einen rekursiven Lösungsansatz für das Problem an.

Wichtig: Wie berechnet sich die Anzahl der notwendigen Multiplikationen für die betrachteten Teilstücke?

(b) Entwerfen Sie daraus einen Algorithmus, der dieses Problem in einer Laufzeit von $O(n^3)$ löst. Verwenden Sie dazu den Ansatz der *dynamischen Programmierung*.

(c) Welche bedeutung haben Ihre Tabellenenträge und in welcher Reihenfolge müssen diese ausgefüllt werden?

Geben Sie am Ende auch eine optimale Klammerung aus.

Die Eingabe ist ein Feld $D[0..n]$ mit den Dimensionen der Matrizen. Dabei steht $D[i-1]$ für die Anzahl der Zeilen vom M_i und $D[i]$ für die Anzahl der Spalten von M_i. Im Beispiel wäre D also $[3, 5, 3, 3]$.

Hinweis: Die *Matrixkettenmultiplikation* ist dem Problem des *optimalen statischen binären Suchbaumes* aus der Vorlesung sehr ähnlich.