

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie

1. (6 Punkte) Entwickle die Funktion $f(z) = \frac{4}{(z-1)^2(z-3)}$ in Laurentreihen in folgenden Kreisringen:

a) $K(0; 1, 3)$; b) $K(0; 3, \infty)$; c) $K(1; 1, 2)$; d) $K(3; 2, \infty)$.

2. (4 Punkte) Finde den Hauptteil der Laurentreihe der Funktion $f(z) = \frac{2}{z^2 + (2-4i)z - 4-4i}$ im Kreisring $K(0; 2, 2\sqrt{2})$.

3. (6 Punkte) Bestimme, welche Art isolierter Singularität (hebbare/Pol/wesentliche) die Funktion $f(z)$ bei 0 hat. Im Falle einer hebbaren Singularität gib den Wert $f(0)$ an, so dass $f(z)$ holomorph wird. Wenn es sich um einen Pol oder eine wesentliche Singularität handelt, dann finde den Hauptteil der Laurentreihe.

a) $f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z^2}}$; b) $f(z) = \frac{z^2}{e^z - 1 - z}$; c) $f(z) = \frac{1}{e^{2z} - 1}$.

4. (4 Punkte) Berechne mit Hilfe der Integralformel von Cauchy für Kreislänge:

$$\int_{\partial D_3(i)} \frac{1}{1+z^2} dz - \int_{\partial D_1(i)} \frac{1}{1+z^2} dz.$$