Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(4 Punkte)* Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf Symmetrie, Reflexivität und Transitivität. Beschreiben Sie für die Äquivalenzrelationen die Äquivalenzklassen.

   (a) Es bezeichne A die Menge aller Autos.

      i. Ein Auto a_1 steht in optischer Relation zu einem Auto a_2, i.Z. $a_1 \sim_o a_2$, falls die beiden dieselbe Farbe haben oder von derselben Marke sind.

      ii. Ein Auto a_1 steht in Versicherungsrelation zu einem Auto a_2, i.Z. $a_1 \sim_v a_2$, falls beide gleiches Baujahr und gleichen Hubraum haben.

   (b) Es seien X und Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung. Betrachten Sie die folgende Relation auf X: $x_1 \sim x_2 :\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

   (c) i. Betrachten Sie auf der Menge der reellen Zahlen die Relation $x \sim y :\Leftrightarrow xy \geq 0$.

      ii. Betrachten Sie nun auf der Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ die folgende Relation: $x \sim y :\Leftrightarrow xy \geq 0$.

2. *(4 Punkte)* Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$.

   (b) Sind f und g surjektiv, so auch $g \circ f$.

   (c) Sind f und $g \circ f$ bijektiv, dann ist g bijektiv.

   (d) Sind g und $g \circ f$ bijektiv, dann ist f bijektiv.

3. *(5 Punkte)* Seien M, N Mengen, $f : M \to N$ eine Abbildung und $A, B \subset M$ sowie $C, D \subset N$ Teilmengen. Zeigen Sie:

   (a) Gilt $A \subset B$, dann folgt $f(A) \subset f(B)$.

   (b) Ist $C \subset D$, so gilt $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

   (c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ und $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

   (d) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ und $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

   (e) Geben Sie ein Beispiel an, so dass $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ gilt.

4. *(5 Punkte)* Ein Konferenzhotel für Mathematiker hat genau $\mathbb{N}$ Betten. Das Hotel ist bereits voll belegt, aber die Mathematiker lassen sich nach Belieben innerhalb des Hotels umquartieren. Das Hotel soll aus wirtschaftlichen Gründen stets voll belegt sein, und wenn möglich sollen alle neu ankommenden Gäste untergebracht werden. Was macht man in den folgenden Fällen ?

   (a) Ein weiterer Mathematiker trifft ein.

   (b) Die Insassen eines Kleinbusses mit n Plätzen suchen Unterkunft.

   (c) Ein Großraumbus mit $\mathbb{N}$ Personen kommt an.

   (d) n Großraumbusse treffen ein.

   (e) $\mathbb{N}$ Großraumbusse fahren vor.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 24./25. Oktober 2016, in den Übungen