Übungen zur Linearen Algebra

1. Sind die folgenden Teilmengen U_1, U_2 des $\mathbb{R}^4$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$?
$$U_1 \coloneqq \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1+x_2+x_3=0,\ x_2+x_3+x_4=0\},$$
$$U_2 \coloneqq \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1+x_2=0,\ x_2+x_3=1,\ x_3+x_4=2\}.$$

2. Unter der **linearen Hülle** einer Teilmenge S eines Vektorraums V versteht man die Menge aller (endlichen) Linearkombinationen von Elementen aus S (Bezeichnung $\operatorname{span} S$).
   (a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{span} S$ ein linearer Unterraum von V ist.
   (b) Untersuchen Sie, ob folgendes gilt: Wenn S genau n linear unabhängige Elemente hat, dann gilt, $\dim \operatorname{span} S = n$.

3. Für folgende Teilmengen $S \subset \mathbb{R}^3$ gebe man die lineare Hülle $\operatorname{span} S$ sowie deren Dimension an:
   (a) $S = \{[1,1,1]^T\}$,
   (b) $S = \{[1,2,0]^T,\ [2,1,0]^T\}$,
   (c) $S = \{[1,0,1]^T,\ [0,1,0]^T,\ [1,1,1]^T\}$,
   (d) $S = \{[x,y,0]^T : x,y \in \mathbb{R},\ x+y=1\}$,
   (e) $S = \{[1,1,0]^T,\ [-1,1,0]^T,\ [1,1,1]^T\}$.

4. Ist das Vektorsystem $\{[1,1,1,1]^T,\ [0,1,0,0]^T,\ [0,1,1,0]^T,\ [0,1,1,1]^T\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^4$? Wenn ja, welchen dieser Vektoren kann man gegen den Vektor $[1,0,0,0]^T$ austauschen, sodass wieder eine Basis entsteht?

5. Seien $p_\pm(t) = 1 \pm t^2 \in \mathbb{R}[t]_2$. Bestimmen Sie die Dimension von
$$U = \operatorname{span}\{p_+(t), p_-(t)\} \subset \mathbb{R}[t]_2$$
sowie eine Basis von U.

6. Man bestimme die lineare Hülle folgender Polynome aus $\mathbb{R}[t]_2$
$$p_1(t) = 1-t^2,\ p_2(t) = t-t^2,\ p_3(t) = 2-t-t^2$$
und gebe deren Dimension an!

7. Welche Dimension hat der Unterraum P von $\mathbb{R}[t]_n$ $(n>2)$:
$$P = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_n : p(0) = p(1) = 0\}?$$

8. Man finde eine Basis der Unterräume
   (a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ des $\mathbb{R}^3$,
   (b) $U = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_2 : p(1) = 0\}$ des $\mathbb{R}[t]_2$.

9. Man bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass
   (a) $[1+\alpha, 2]^T,\ [1, 2+\alpha]^T$ eine Basis in $\mathbb{R}^2$ ist,
   (b) $[\alpha^2, 4, 9]^T,\ [\alpha, 2, 3]^T,\ [1,1,1]^T$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ ist.

10. Zeigen Sie, dass die linearen Räume $\mathbb{R}[t]_n$ und $\mathbb{R}^{n+1}$ isomorph sind!

11. Untersuchen Sie, ob die Abbildung
$$f : \mathbb{C}[t]_2 \to \mathbb{C}^3,\ at^2+bt+c \mapsto (a-c, b-c, a+c)$$
ein Vektorraum-Isomorphismus ist!

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.