

Hausaufgabe 14

HA14.1 (4 Punkte). Seien $A, B \in \text{GL}(n, K)$. Zeigen Sie, dass gilt:

- (a) ${}^t(A^\#) = ({}^tA)^\#$,
- (b) $(AB)^\# = B^\#A^\#$,
- (c) $\det(A^\#) = (\det(A))^{n-1}$,
- (d) $(A^\#)^\# = (\det(A))^{n-2}A$.

HA14.2 (4 Punkte). (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

einmal durch Entwicklung nach der ersten, dann durch Entwicklung nach der dritten Zeile.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

HA14.3 (8 Punkte). Im Vektorraum K^2 über dem Körper K nennt man für zwei Punkte $a \neq 0$ und p aus K^2 die Menge $\{p + \alpha a \mid \alpha \in K\}$ eine Gerade.

- (a) Zeigen Sie: Zu zwei verschiedenen Punkten a und b des K^2 gibt es genau eine Gerade durch a und b , d. h., genau eine Gerade, die a und b enthält.
- (b) Zeigen Sie: Die Gerade durch a und b ist gleich $\{\alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \in K, \alpha + \beta = 1\}$.
- (c) Beweisen Sie: Sind $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ verschiedene Punkte des K^2 , dann liegt ein Punkt $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in K^2$ genau dann auf der Geraden durch a und b , wenn gilt

$$\det \begin{pmatrix} x & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

(d) Sind ω_1, ω_2, ρ aus K , so heißt die Menge der $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in K^2$ mit

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 + \rho = 0$$

ein Kreis, falls sie mindestens zwei verschiedene Punkte enthält. Zeigen Sie, dass drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ des K^2 stets auf einem Kreis liegen, nämlich dem durch

$$\det \begin{pmatrix} \xi_1^2 + \xi_2^2 & \xi_1 & \xi_2 & 1 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 & \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 & \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 & \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

beschrieben.

HA14.4 (4 Punkte). Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel.

$$\begin{cases} 2x_0 - 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 8 \\ -x_0 + 8x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 12 \\ -x_0 + 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ -9x_0 + 36x_1 + 13x_2 - 24x_3 = 6 \end{cases}$$

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

<https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php>

zu finden.

Abgabe bis 04.02.2020 in der Übung.