Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(6 Punkte)* Die folgende Tabelle gibt Informationen über die (endliche) Gruppe $\mathcal{O}$ der "orientierungserhaltenden Symmetrien" des Würfels, d.h. der Elemente von $SO(3)$, die einen Würfel im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt in 0 auf sich abbilden.

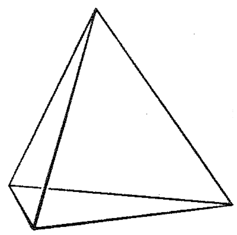
$$X := \text{ Anzahl der Drehachsen eines Typs,}$$
$$Y := \text{ Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs,}$$

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
–	–	0	(id :) 1
3	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$	$3 \cdot 3 = 9$
6	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	6
4	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$

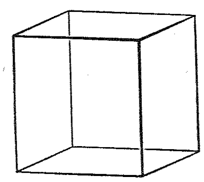
$\Rightarrow |\mathcal{O}| = 1 + 9 + 6 + 8 = 24.$

(a) Machen Sie eine analoge Tabelle für die Gruppe $\mathcal{T}$ der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Tetraeders und bestimmen Sie $|\mathcal{T}|$.

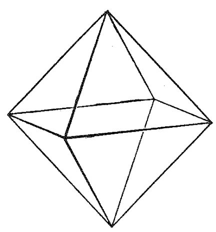
(b) Machen Sie eine analoge Tabelle für die Gruppe $\mathcal{I}$ der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Dodekaeders und bestimmen Sie $|\mathcal{I}|$.



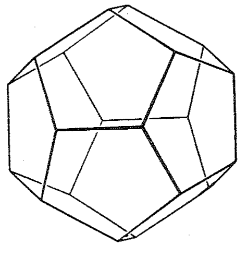
Tetraeder



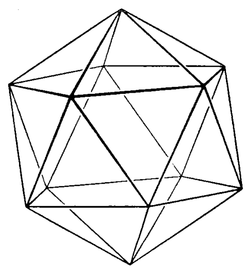
Würfel



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder

2. *(4 Punkte)* Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und sei $x = {}^{tr}(x_1, ..., x_n) \in M(n \times 1, \mathbb{C})$ ein (komplexer) Eigenvektor von A mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $A \cdot x = \lambda \cdot x$.

   (a) 1. Fall, $\lambda \in \mathbb{R}$: Zeigen Sie, daß auch $\Re(x) := {}^{tr}(\Re(x_1), ..., \Re(x_n))$ und $\Im(x) := {}^{tr}(\Im(x_1), ..., \Im(x_n)) \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ Eigenvektoren von A mit Eigenwert λ sind oder gleich Null sind.

   (b) 2. Fall, $\lambda \notin \mathbb{R}$: Zeigen Sie, daß $\Re(x)$ und $\Im(x)$ linear unabhängig in $M(n \times 1, \mathbb{R})$ sind. Zeigen Sie, daß F_A (= die Multiplikation mit A) den von ihnen erzeugten Unterraum

   $$U := \operatorname{span}(\Re(x), \Im(x)) \subset M(n \times 1, \mathbb{R})$$

   auf sich abbildet und berechnen Sie die (2×2)-Matrix

   $$M((\Re(x), \Im(x)), F_A|_U, (\Re(x), \Im(x)).$$

3. *(4 Punkte)* Bestimmen Sie die Eigenwerte und eine ON-Basis von Eigenvektoren der reellen symmetrischen 3×3-Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. *(4 Punkte)*

   (a) Zeigen Sie, daß die Matrix

   $$A_3 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 1, \mathbb{R})$$

   orthogonal ist und Determinante $+1$ hat.

   (b) Nach Satz 12.7 a) und Beispiel 12.8 ii) beschreibt sie daher eine Drehung. Bestimmen Sie die Drehachse.

   (c) Bestimmen Sie eine ON-Basis (c_1, c_2, c_3) von $M(3 \times 1, \mathbb{R})$, so daß c_1 ein Eigenvektor von A_3 mit Eigenwert 1 ist und c_2 und c_3 die dazu orthogonale Ebene aufspannen.

   (d) Sei $T \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ die orthogonale Matrix mit Spalten c_1, c_2, c_3. Berechnen Sie $T^{tr} \cdot A_3 \cdot T$. Geben Sie $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ des Drehwinkels α um die (orientierte) Drehachse $\mathbb{R} \cdot c_1$ an.

5. *(6 points)* Let V be an n-dimensional unitary vector space with scalar product ϕ. Let $f : V \to V$ be selfadjoint. Suppose that for some k with $1 \leq k \leq n$ a k-dimensional subspace $U \subset V$ exists which satisfies

$$\phi(f(v), v) > 0 \qquad \text{for all } v \in U \backslash \{0\}.$$

Show that f has at least k positive eigenvalues.

6. *(6 Punkte)*

Der $\mathbb{C}$-Vektorraum $C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ ist ein unitärer Vektorraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x.$$

Die Vektorräume

$$\begin{aligned} H_{trig,\mathbb{C}}(n) \quad &:= \quad \{\sum_{p=-n}^{n} c_p \cdot e^{ipx} \mid c_p \in \mathbb{C}\} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ \text{und} \quad H_{trig,\mathbb{C}} \quad &:= \quad \bigcup_n H_{trig,\mathbb{C}}(n) \end{aligned}$$

sind unitäre Untervektorräume. (Diese Aussagen brauchen Sie nicht zu beweisen.)

   (a) Berechnen Sie $\langle e^{ipx}, e^{iqx} \rangle$ für $p, q \in \mathbb{Z}$ und zeigen Sie damit, daß die Funktionen $e^{ipx}, p \in \mathbb{Z}$, eine Orthogonalbasis von $H_{trig,\mathbb{C}}$ bilden.

   (b) Geben Sie eine Integralformel für die Koeffizienten c_p von $f = \sum_{p=-n}^{n} c_p \cdot e^{ipx}$ an.

   (c) Zeigen Sie

   $$H_{trig,\mathbb{C}}(n) \stackrel{!}{=} \{a_0 + \sum_{p=1}^{n} (a_p \cos(px) + b_p \sin(px)) \mid a_p, b_p \in \mathbb{C}\}$$

   und schreiben Sie für ein $f \in H_{trig,\mathbb{C}}$ die Koeffizienten c_p ($p \in \mathbb{Z}$) als Linearkombinationen der Koeffizienten a_q ($q \geq 0$) und b_q ($q > 0$).

Abgabe bis Dienstag, den 13. Juni 2017, in den Übungen